RAZÃO ÁUREA

A HISTÓRIA DE FI,

um número surpreendente



Mario Livio



RAZÃO ÁUREA

Mario Livio

RAZÃO ÁUREA

Tradução de
MARCO SHINOBU MATSUMURA

Revisão técnica de
MICHELLE DYSMAN



EDITORA RECORD
RIO DE JANEIRO • SÃO PAULO

2006

CIP-Brasil. Catalogação-na-fonte
Sindicato Nacional dos Editores de Livros, RJ.

Livio, Mario, 1945-
L762r Razão áurea: a história de Fi, um número surpreendente / Mario Livio; tradução Marco Shinobu Matsumura. – Rio de Janeiro: Record, 2006.

Tradução de: The golden ratio
ISBN 85-01-06653-2

1. Segmento áureo. 2. Razão e proporção. I. Título.

CDD – 516.204
06-0831 CDU – 511.13

Título original em inglês:
THE GOLDEN RATIO

Publicado em acordo com a Broadway Books, uma divisão de
The Doubleday Broadway Publishing Group, uma divisão da Random House, Inc.

Direitos exclusivos de publicação em língua portuguesa para o Brasil adquiridos pela
EDITORA RECORD LTDA.
Rua Argentina 171 – Rio de Janeiro, RJ – 20921-380 – Tel.: 2585-2000
que se reserva a propriedade literária desta tradução

Impresso no Brasil

ISBN 85-01-06653-2

PEDIDOS PELO REEMBOLSO POSTAL
Caixa Postal 23.052
Rio de Janeiro, RJ – 20922-970



À memória de meu pai,
Robin Livio

SUMÁRIO

PREFÁCIO

Razão Áurea é um livro sobre um número, um número muito especial. Você encontrará este número, 1,61803..., em conferências sobre História da Arte e em listas de "números favoritos" compiladas por matemáticos. Também chama atenção o fato de ser esse número objeto de inúmeras experiências em psicologia.

Fiquei interessado no número conhecido como Razão Áurea quinze anos atrás, quado preparava uma palestra sobre estética na física (não, isto não é uma contradição) e não consegui tirá-lo da cabeça desde então.

Uma quantidade de colegas, amigos e estudantes muito maior do que eu poderia citar, de uma grande variedade de disciplinas, contribuiu direta e indiretamente para este livro. Gostaria aqui de estender meus agradecimentos especiais a Ives-Alain Bois, Mitch Feigenbaum, Hillel Gauchman, Ted Hill, Ron Lifschitz, Roger Penrose, Johanna Postma, Paul Steinhardt, Pat Thiel, Anne van der Helm, Divakar Viswanath e Stephen Wolfram por informações inestimáveis e discussões extremamente úteis.

Sou grato a meus colegas Daniela Calzetti, Stefano Casertano e Massimo Stiavelli pela ajuda nas traduções do latim e do italiano; a Claus Leitherer e Hermine Landt pela ajuda nas traduções do alemão, e a Patrick Godon por sua ajuda nas traduções do francês. Sarah Stevens-Rayburn, Elizabeth Fraser e Nancy Hanks me proporcionaram um valioso suporte bibliográfico e lingüístico. Sou particularmente grato a Sharon Toolan pelo auxílio na preparação do original.

Meus sinceros agradecimentos à minha agente, Susan Rabiner, pelo estímulo permanente antes e durante a elaboração deste livro.

Sou profundamente grato ao meu editor da Doubleday Broadway, Gerald Howard, pela sua leitura cuidadosa do original e por seus comentários criteriosos. Também sou grato a Rebecca Holland, editora gerente da Doubleday Broadway, por sua incansável ajuda durante a produção deste livro.

Finalmente, sem a constante inspiração e o paciente apoio proporcionados por Sofie Livio, este livro não teria sido sequer escrito.

1

PRELÚDIO PARA UM NÚMERO

Inumeráveis são as maravilhas do mundo.

— SÓFOCLES (495-405 A.C.)

O famoso físico britânico lorde Kelvin (William Thomson; 1824-1907), em cuja homenagem foram batizados os graus da escala de temperatura absoluta, disse certa vez em uma conferência: "Quando não podemos expressar algo em números, nosso conhecimento é de um tipo escasso e insatisfatório." Kelvin estava, obviamente, se referindo ao conhecimento exigido para o avanço da ciência. Mas números e matemática têm a curiosa propensão a contribuir até para o entendimento de coisas que são, ou pelo menos parecem ser, extremamente distantes da ciência. Em *O mistério de Marie Rogêt,* de Edgar Allan Poe, o famoso detetive Auguste Dupin diz: "Nós fazemos da sorte uma questão de cálculo absoluto. Submetemos o não-procurado e o não-imaginado às fórmulas matemáticas das escolas." Num nível ainda mais simples, considere o seguinte problema que o leitor pode ter encontrado ao se preparar para uma festa: há uma barra de chocolate composta de doze pedaços; quantas quebras são necessárias para separar todos os pedaços? A resposta é, na verdade, mais simples do que você pode ter

pensado e não envolve quase nenhum cálculo. Toda vez que se faz uma quebra, tem-se um pedaço a mais do que antes. Portanto, se você precisa terminar com doze pedaços, terá que quebrar onze vezes. (Verifique isso por si mesmo.) De modo mais geral, qualquer que seja o número de pedaços que formam a barra de chocolate, o número de quebras é sempre um a menos que o número de pedaços.

Mesmo que você não seja um apreciador de chocolate, perceberá que esse exemplo demonstra uma regra matemática simples que pode ser aplicada em muitas outras circunstâncias. Mas, além das propriedades, fórmulas e regras matemáticas (muitas das quais sempre acabamos esquecendo), existem alguns números especiais que são tão onipresentes que nunca deixam de nos surpreender. O mais famoso deles é o número Pi (π), que é a razão entre a circunferência de qualquer círculo e seu diâmetro. O valor de Pi, 3,14159..., tem fascinado muitas gerações de matemáticos. Embora tenha sido originalmente definido na geometria, o Pi aparece muito freqüente e inesperadamente no cálculo de probabilidades. Um exemplo famoso é conhecido como a Agulha de Buffon, em homenagem ao matemático francês George-Louis Leclerc, conde de Buffon (1707-1788), que, em 1777, propôs e resolveu o seguinte problema matemático. Leclerc perguntou: suponha que você tenha uma grande folha de papel no chão, pautada com linhas retas paralelas separadas por uma distância fixa. Uma agulha de comprimento exatamente igual ao espaçamento entre as linhas é jogada ao acaso sobre o papel. Qual é a probabilidade de que a agulha caia de tal maneira que cruze uma das linhas (por exemplo, como na Figura 1)? Surpreendentemente, a resposta é o número $2/\pi$. Portanto, em princípio, você pode avaliar π repetindo esta experiência muitas vezes e observando em que fração do total de jogadas você obtém uma interseção. (Mas existem maneiras menos tediosas de encontrar o valor de Pi.) Hoje em dia, Pi se tornou uma palavra tão familiar que até inspirou o cineasta Darren Aronofsky a fazer, em 1998, um *thriller* intelectual com esse título.

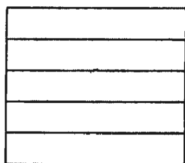


Figura 1

Menos conhecido que o Pi é um outro número, o Fi (Φ), que, em muitos aspectos, é ainda mais fascinante. Suponha que eu lhe pergunte: o que o encantador arranjo de pétalas numa rosa vermelha, o famoso quadro "O Sacramento da Última Ceia", de Salvador Dalí, as magníficas conchas espirais de moluscos e a procriação de coelhos têm em comum? É difícil de acreditar, mas esses exemplos bem díspares têm em comum um certo número, ou proporção geométrica, conhecido desde a Antiguidade, um número que no século XIX recebeu o título honorífico de "Número Áureo", "Razão Áurea" e "Seção Áurea". Um livro publicado na Itália no começo do século XVI chegou a chamar essa razão de "Proporção Divina".

No dia-a-dia, usamos a palavra "proporção" ou para a relação comparativa entre partes de coisas com respeito a tamanho ou quantidade, ou quando queremos descrever uma relação harmoniosa entre diferentes partes. Na matemática, o termo "proporção" é usado para descrever uma igualdade do tipo: nove está para três assim como seis está para dois. Como veremos, a Razão Áurea nos fornece uma intrigante mistura das duas acepções, já que, embora seja matematicamente definida, considera-se que revela qualidades agradavelmente harmoniosas.

A primeira definição clara do que mais tarde se tornou conhecido como a Razão Áurea foi dada por volta de 300 a.C. pelo fundador da geometria como sistema dedutivo formalizado, Euclides de Alexandria. Retornaremos a Euclides e suas fantásticas realizações no Capítulo 4, mas agora quero observar apenas que é tão grande a admiração inspirada por Euclides que, em 1923, a poetisa Edna St. Vincent Millay escreveu um poema intitulado "Somente Euclides viu a Beleza Nua". Na verdade, até as notas de aula de Millay do seu curso de geometria euclidiana foram preservadas. Euclides definiu uma proporção derivada da simples divisão de uma linha no que ele chamou de sua "razão extrema e média". Nas palavras de Euclides:

Diz-se que uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor.



Figura 2

Em outras palavras, se observarmos a Figura 2, a linha AB certamente é maior que o segmento AC. Ao mesmo tempo, o segmento AC é maior que o CB. Se a razão do comprimento de AC para o comprimento de CB for igual à razão de AB para AC, então a linha foi cortada na razão extrema e média, ou numa Razão Áurea.

Quem poderia imaginar que essa divisão de linha aparentemente tão inocente, que Euclides definiu com objetivos puramente geométricos, poderia ter conseqüências em temas que vão do arranjo de folhas em botânica à estrutura de galáxias que contêm bilhões de estrelas, ou da matemática às artes? A Razão Áurea nos fornece, portanto, um maravilhoso exemplo do sentimento de total espanto que o famoso físico Albert Einstein (1879-1955) valorizava tanto. Nas palavras do próprio Einstein: "A melhor coisa que podemos vivenciar é o mistério. Ele é a emoção fundamental que está no berço da ciência e da arte verdadeiras. Aquele que não o conhece e não mais se maravilha, não sente mais o deslumbramento, vale o mesmo que um morto, que uma vela apagada."

Como veremos calculado neste livro, o valor exato da Razão Áurea (a razão de AC para CB na Figura 2) é o número que nunca termina e nunca se repete 1,6180339887..., e esses números que nunca terminam têm intrigado os homens desde a Antiguidade. Diz uma história que quando o matemático grego Hipasos de Metaponto descobriu, no século V a.C., que a Razão Áurea é um número que não é nem inteiro (como os familiares 1, 2, 3...) nem razão de dois números inteiros (como as frações $^1/_2$, $^2/_3$, $^3/_4$,...,

conhecidos coletivamente como *números racionais*), isso deixou totalmente chocados os outros seguidores do famoso matemático Pitágoras (os pitagóricos). A visão de mundo dos pitagóricos (que descreveremos em detalhe no Capítulo 2) era baseada numa admiração extrema pelos *arithmos* — as propriedades intrínsecas dos números inteiros ou suas razões — e seu suposto papel no Cosmo. A descoberta de que existiam números como a Razão Áurea que continuam para sempre sem exibir qualquer repetição ou padrão causou uma verdadeira crise filosófica. Reza a lenda que, aturdidos com a estupenda descoberta, os pitagóricos sacrificaram, apavorados, cem bois, embora isso pareça ser bastante improvável, já que os pitagóricos eram estritamente vegetarianos. Devo enfatizar neste ponto que muitas dessas histórias são baseadas em material histórico insuficientemente documentado. A data exata da descoberta de números que não são inteiros nem frações, conhecidos como *números irracionais*, não é conhecida com grau algum de certeza. Mesmo assim, alguns pesquisadores situam a descoberta no século V a.C., o que é pelo menos coerente com a datação das histórias que acabamos de contar. O que é claro é que os pitagóricos basicamente acreditavam que a existência de tais números era tão horrível que devia (a existência) representar algum tipo de erro cósmico, algo que deveria ser suprimido e guardado em segredo.

O fato de a Razão Áurea não poder ser expressa como uma fração (como um número racional) significa simplesmente que a razão entre os dois comprimentos AC e CB na Figura 2 não pode ser expressa como uma fração. Em outras palavras, por mais que procuremos, jamais encontraremos uma medida cujo valor, multiplicado, digamos, por 31, coincida com a medida de AC, e multiplicado por 19 coincida com a de CB. Dois comprimentos com esta propriedade são chamados de *incomensuráveis*. A descoberta de que a Razão Áurea é um número irracional, portanto, era, ao mesmo tempo, a descoberta da incomensurabilidade. Em *Sobre a vida pitagórica* (cerca de 300 d.C.), o filósofo e historiador Iâmblico, um descendente de uma nobre família da Síria, descreve a violenta reação a essa descoberta:

> "Eles diziam que o primeiro [humano] a revelar a natureza da comensurabilidade e da incomensurabilidade para aqueles que não eram dignos de compartilhar a teoria era tão odiado que não só foi banido da associação e do modo de vida [pitagórico], como também teve seu túmulo construído, como se o antigo colega tivesse sido apartado da vida entre o gênero humano."

Na literatura matemática profissional, o símbolo habitual para a Razão Áurea é a letra grega tau (τ, do grego τομή, to-mĭ, que significa "o corte" ou "a seção"). Entretanto, no início do século XX, o matemático americano Mark Barr deu à razão o nome de Fi (Φ), a primeira letra grega no nome de Fídias, o grande escultor grego que viveu entre 490 e 430 a.C. As maiores realizações de Fídias foram o "Partenon de Atenas" e o "Zeus" no templo de Olímpia. Tradicionalmente, considera-se também que ele foi o responsável por outras esculturas do Partenon, embora seja bastante provável que muitas delas, na verdade, tenham sido feitas por seus alunos e assistentes. Barr decidiu homenagear o escultor porque alguns historiadores da arte sustentavam que Fídias fazia uso freqüente e meticuloso da Razão Áurea nas suas esculturas. (Examinaremos detalhadamente afirmações semelhantes neste livro.) Usarei os nomes Razão Áurea, Seção Áurea, Número Áureo, Fi e o símbolo Φ livremente ao longo do livro, pois esses são os nomes mais freqüentemente encontrados na literatura matemática recreativa.

Algumas das maiores mentes matemáticas de todos os tempos, de Pitágoras e Euclides na Grécia antiga, passando pelo matemático italiano da Idade Média Leonardo de Pisa e o astrônomo renascentista Johannes Kepler, até figuras científicas do presente, como o físico de Oxford Roger Penrose, passaram horas sem fim trabalhando com esta simples razão e suas propriedades. Mas a fascinação pela Razão Áurea não se restringe aos matemáticos. Biólogos, artistas, músicos, historiadores, arquitetos, psicólogos e até místicos têm examinado e debatido as bases de sua ubiqüidade e seu apelo. De fato, provavelmente é correto dizer que a Razão Áurea tem inspirado pensadores de todas as disciplinas mais do que qualquer outro número na história da Matemática.

Uma imensa quantidade de pesquisa, principalmente do matemático canadense Roger Herz-Fischler (descrita no seu excelente livro *Uma história matemática do número áureo*), tem sido dedicada até à simples questão da origem do nome "Segmento Áureo". Dado o entusiasmo que essa razão tem gerado desde a Antiguidade, poderíamos pensar que o nome também tem origens antigas. De fato, alguns livros competentes de história da matemática, como *O nascimento da matemática na era de Platão* de François Lasserre, e *Uma história da matemática*, de Carl B. Boyers, situam a origem desse nome nos séculos XV e XVI, respectivamente. Mas não parece ser esse o caso. Pelo que posso dizer depois de examinar boa parte das tentativas de se achar dados históricos, essa expressão foi usada pela primeira vez pelo matemático alemão Martin Ohm (irmão do famoso físico Georg Simon Ohm, autor da Lei de Ohm no eletromagnetismo) na segunda edição, de 1835, do seu livro *Die Reine Elementar-Mathematik* (A matemática elementar pura). Ohm escreve em uma nota de rodapé: "Essa divisão de uma linha arbitrária em duas partes também costuma ser chamada de seção áurea." A linguagem de Ohm claramente nos deixa com a impressão de que não foi ele quem inventou a expressão, mas que, em vez disso, usou um nome comumente aceito. Porém, o fato de que ele não a utilizou na primeira edição do livro (publicada em 1826) pelo menos sugere que o nome "Razão Áurea" (ou, em alemão, "Goldene Schnitt") só ganhou popularidade por volta de 1830. A expressão pode ter sido usada oralmente antes disso, talvez em círculos não-matemáticos. Mas não há dúvida de que, após o livro de Ohm, a expressão "Seção Áurea" começou a aparecer freqüente e repetidamente na literatura alemã sobre matemática e história da arte. Ela pode ter feito sua estréia em inglês em um artigo de James Sully sobre estética, publicado na nona edição da *Enciclopédia Britânica*, em 1875. Sully faz referência à "interessante enquete experimental... instituída por (Gustav Theodor) Fechner — um físico e psicólogo pioneiro alemão do século XIX — sobre a suposta superioridade da 'seção áurea' como uma proporção visível". (Discutirei os experimentos de Fechner no Capítulo 7.) O uso mais antigo em inglês em contexto matemático parece ter ocorrido em um arti-

go intitulado "O Segmento Áureo" (de E. Ackermann), publicado em 1895 no *American Mathematical Monthly* e, mais ou menos na mesma época, no livro *Introdução à álgebra*, de 1898, do conhecido professor e escritor G. Chrystal (1851-1911). Apenas como curiosidade, deixe-me observar que a única definição de "Número Áureo" que aparece na edição de 1900 da enciclopédia francesa *Nouveau Larousse Illustré* é: "Um número usado para indicar cada um dos anos do ciclo lunar." Isto se refere à posição de um calendário anual dentro do ciclo de dezenove anos após o qual as fases da Lua retornam às mesmas datas. Evidentemente, a expressão levou um tempo maior para entrar na nomenclatura matemática francesa.

Mas por que tanto alvoroço em torno disso? O que faz desse número, ou proporção geométrica, algo tão interessante que deva merecer toda essa atenção?

A atratividade do "Número Áureo" origina-se, antes de mais nada, do fato de que ele tem um jeito quase sobrenatural de surgir onde menos se espera.

Pegue, por exemplo, uma maçã qualquer, fruta freqüentemente associada (provavelmente de modo equivocado) com a árvore do conhecimento que aparece de forma tão proeminente na descrição bíblica da queda da humanidade do Paraíso, e corte-a pela sua circunferência. Você irá encontrar as sementes da maçã arrumadas num padrão de estrela de cinco pontas ou pentagrama (Figura 3). Cada um dos cinco triângulos isósceles que formam as pontas do pentagrama tem a propriedade de que a razão entre o comprimento de seu lado mais comprido e do mais curto (a base) é igual à Razão Áurea, 1,618... Mas o leitor pode achar que isso talvez não seja assim tão surpreendente. Afinal, já que a Razão Áurea foi definida como uma proporção geométrica, talvez não devêssemos ficar espantados demais ao descobrir essa proporção em algumas formas geométricas.

Essa, porém, é só a ponta do *iceberg*. De acordo com a tradição budista, em um dos sermões do Buda ele não emitiu uma única palavra. Ele simplesmente segurava uma flor diante de sua platéia. O que uma flor pode nos ensinar? Uma rosa, por exemplo, quase sempre é considerada um

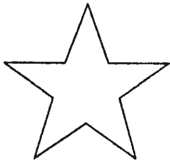


Figura 3

símbolo de simetria, harmonia, amor e fragilidade naturais. Em *Religião do homem*, o poeta e filósofo indiano Rabindranath Tagore (1861-1941) escreve: "De alguma maneira, sentimos que, por intermédio de uma rosa, a linguagem do amor chega aos nossos corações." Suponha que você queira quantificar a aparência simétrica de uma rosa. Pegue uma rosa e a disseque para ver como suas pétalas se sobrepõem às suas antecessoras. Como descrevo no Capítulo 5, você vai descobrir que as posições das pétalas estão arrumadas de acordo com uma regra matemática que se baseia na Razão Áurea.

Passando agora ao reino animal, todos nós conhecemos a beleza impressionante das estruturas espirais das conchas de muitos moluscos, como o náutilo (*Nautilus pompilius*; Figura 4). De fato, o Shiva dançante dos mitos hindus segura um desses náutilos em suas mãos, como um símbolo de um dos instrumentos do início da criação. Essas conchas também têm inspirado muitas construções arquitetônicas. O arquiteto americano Frank Lloyd Wright (1869-1959), por exemplo, baseou o desenho do Museu Guggenheim de Nova York na estrutura do náutilo com câmaras. Dentro do museu, os visitantes sobem uma rampa em espiral, seguindo adiante quando suas capacidades imaginativas ficam saturadas pela arte que vêem, tal como o molusco constrói sucessivas câmaras espirais à medida que ocupa totalmente seu espaço físico. Descobriremos no Capítulo 5 que o crescimento das conchas espirais também obedece a um padrão que é orientado pela Razão Áurea.



Figura 4

A essa altura, não precisamos ser místicos de numerologia para começar a sentir um certo assombro por essa propriedade da Razão Áurea de surgir em situações e fenômenos que aparentemente não têm relação entre si. Além disso, como mencionei no começo deste capítulo, a Razão Áurea pode ser encontrada não só em fenômenos

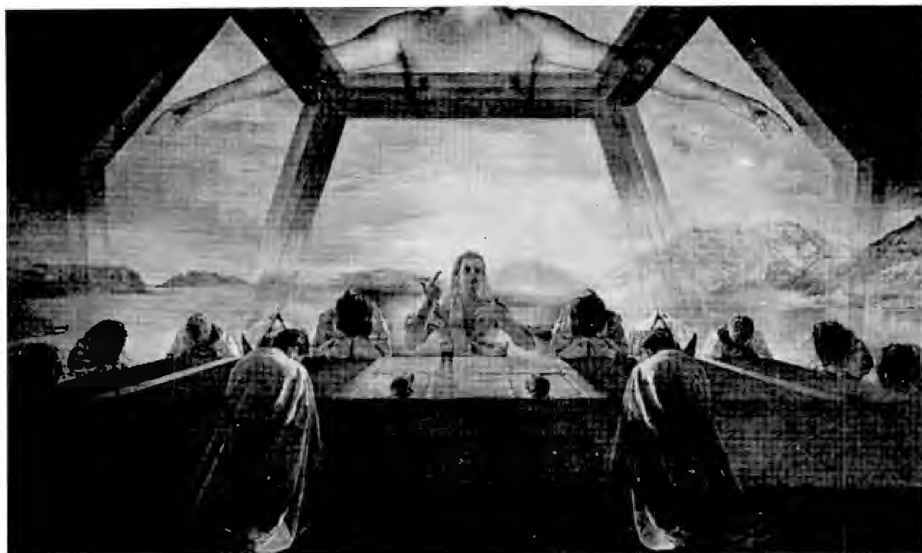


Figura 5

naturais mas também em uma variedade de objetos feitos pelo homem e em obras de arte. Por exemplo, na pintura de Salvador Dalí de 1955, "Sacramento da Última Ceia" (na *National Gallery, Washington D.C.*; Figura 5), as dimensões da pintura (aproximadamente 270 cm × 167 cm) estão numa Razão Áurea entre si. Talvez ainda mais importante, parte de um enorme dodecaedro (um sólido regular de 12 faces no qual cada face é um pentágono) é visto flutuando acima da mesa, engolindo-a. Como veremos no Capítulo 4, sólidos regulares (como o cubo) que podem ser perfeitamente encaixados numa esfera (com todos os seus vértices encostados nela), e o dodecaedro em particular, estão intimamente relacionados com a Razão Áurea. Por que Dalí decidiu exibir a Razão Áurea de maneira tão destacada nessa pintura? Sua observação de que "a Comunhão deve ser simétrica" apenas começa a responder a essa pergunta. Como mostrarei no Capítulo 7, a Razão Áurea figura (ou, pelo menos, afirma-se que ela figura) em obras de muitos outros artistas, arquitetos e desenhistas, e até em famosas composições musicais. Em termos gerais, a Razão Áurea foi usada em algumas

dessas obras para que elas obtivessem o que poderíamos chamar de "efetividade visual (ou auditiva)". Uma das propriedades que contribuem para essa efetividade é a *proporção* — a relação de tamanho das partes entre si e com o todo. A história da arte mostra que, na longa busca pelo elusivo cânone da proporção "perfeita", a que poderia de algum modo conferir automaticamente qualidades estéticas agradáveis a todas as obras artísticas, a Razão Áurea provou ser a mais duradoura. Mas por quê?

Um exame mais atento dos exemplos da natureza e das artes revela que eles levantam questões em três diferentes níveis com profundidade crescente. Em primeiro lugar, existem as questões imediatas: (a) Será que todas as ocorrências de Fi na natureza e nas artes citadas na literatura são reais ou algumas delas simplesmente representam interpretações equivocadas e extravagantes? (b) Podemos realmente explicar a ocorrência (se for real) de Fi nessas e em outras circunstâncias? Segundo, já que definimos "beleza" como, por exemplo, no *Webster's Unabrigded Dictionary*, "a qualidade que faz um objeto parecer agradável ou satisfatório de uma certa maneira", isso suscita a seguinte pergunta: Existe um componente estético na matemática? E em caso positivo, qual é a essência desse componente? Esta é uma questão séria, pois, como o arquiteto, matemático e engenheiro americano Richard Buckminster Fuller (1895-1983) disse uma vez: "Quando estou trabalhando num problema, nunca penso a respeito de beleza. Eu penso apenas em como resolver o problema. Mas quando termino, se a solução não é bonita, eu sei que está errada." Finalmente, a pergunta mais intrigante é: o que é que faz a matemática ser tão poderosa e onipresente? Por que motivo a matemática e constantes numéricas como a Razão Áurea têm um papel tão importante em temas que vão das teorias fundamentais do Universo ao mercado de ações? Será que a matemática existe mesmo independentemente dos indivíduos que foram os descobridores/inventores dela e de seus princípios? Será que o universo é matemático por sua própria natureza? Esta última pergunta pode ser reformulada, usando-se um famoso aforismo do físico britânico *sir* James Jeans (1847-1946), como: Será que Deus é um matemático?

Tentarei abordar todas essas questões em detalhe neste livro por meio da fascinante história do Fi. A história às vezes emaranhada dessa razão atravessa milênios e continentes. De forma igualmente importante, espero contar uma boa história de interesse humano. Uma parte desta história tratará de uma época em que "cientistas" e "matemáticos" eram indivíduos auto-selecionados que simplesmente se dedicavam a questões que despertavam sua curiosidade. Essas pessoas muitas vezes trabalhavam e morriam sem saber se seus trabalhos iriam mudar o curso do pensamento científico ou iriam simplesmente desaparecer sem deixar vestígios.

Antes de embarcar nesta jornada principal, contudo, temos de nos familiarizar com números em geral e com a Razão Áurea em particular. Afinal de contas, como foi que surgiu a idéia original da Razão Áurea? O que foi que levou Euclides a se dar ao trabalho de definir tal divisão de linha? Meu objetivo é ajudar o leitor a absorver algumas idéias sobre as verdadeiras raízes do que poderíamos chamar de Numerismo Áureo. Para tanto, iremos agora fazer um breve passeio pela própria aurora da Matemática.

2

O TOM E O PENTAGRAMA

Até onde as leis da matemática se referem à realidade, não há certeza;
e até onde há certeza, elas não se referem à realidade.

— ALBERT EINSTEIN (1879-1955)

Vejo uma certa ordem no universo, e a matemática é
uma maneira de fazê-la visível.

— MAY SARTON (1912-1995)

Ninguém sabe ao certo quando os humanos começaram a contar, isto é, a medir múltiplas coisas de forma quantitativa. Na verdade, nós nem sabemos com certeza se números como "um", "dois", "três" (os números cardinais) precederam números como "primeiro", "segundo", "terceiro" (os números ordinais) ou vice-versa. Números cardinais simplesmente determinam a pluralidade de uma coleção de itens, como o número de crianças num grupo. Números ordinais, por outro lado, especificam a ordem e a sucessão de elementos específicos em um grupo, como uma determinada

data em um mês ou o número de uma cadeira numa sala de concertos. Originalmente, supunha-se que a contagem se desenvolveu especificamente para lidar com necessidades simples do dia-a-dia, o que claramente indicava que os números cardinais teriam aparecido primeiro. No entanto, alguns antropólogos sugeriram que os números podem ter aparecido inicialmente na cena histórica relacionados a alguns rituais que exigiam a aparição sucessiva (numa ordem específica) de indivíduos durante as cerimônias. Se for correta, essa idéia sugere que o conceito de número ordinal pode ter precedido o de cardinal.

Obviamente, foi necessário um salto mental ainda maior para se sair da simples contagem de objetos para uma verdadeira compreensão dos números como quantidades abstratas. Assim, enquanto as primeiras noções de números podem ter estado relacionadas inicialmente a *contrastes*, talvez associadas à sobrevivência — É *um lobo* ou é uma *alcatéia*? — a verdadeira compreensão de que duas mãos e duas noites são manifestações do número 2 provavelmente levou séculos para ser absorvida. O processo teve de passar pelo reconhecimento de similaridades (ao contrário de contrastes) e correspondências. Muitos idiomas contêm traços da separação inicial entre o simples ato de contar e o conceito abstrato de números. Nas Ilhas Fiji, por exemplo, o termo para dez cocos é "*koro*", enquanto que para dez barcos é "*bolo*". Do mesmo modo, entre os tauades da Nova Guiné, palavras diferentes são usadas para falar de pares de machos, pares de fêmeas e pares mistos. Mesmo no inglês, palavras diferentes são muitas vezes associadas a um mesmo número de diferentes agregações. Diz-se em inglês, "*a yoke of oxen*" (uma parelha de bois), mas nunca "*a yoke of dogs*" (uma parelha de cachorros).

Certamente, o fato de os humanos possuírem o mesmo número de mãos, pés, olhos ou seios ajudou no desenvolvimento da compreensão abstrata do número 2. Mesmo assim, deve ter levado mais tempo para que se associasse esse número a coisas que não são idênticas, como o fato de existirem duas grandes luzes no céu, o Sol e a Lua. Existe pouca dúvida de que as primeiras distinções feitas foram entre um e dois e entre dois e "muitos". Esta conclu-

são é baseada nos resultados de estudos feitos no século XIX entre populações que estavam relativamente pouco expostas à civilização predominante e sobre as diferenças lingüísticas entre os termos usados para diferentes números nos tempos antigos e na época atual.

TRÊS É UMA MULTIDÃO

A primeira indicação do fato de que números maiores que dois foram originalmente tratados como "muitos" data de cinco milênios atrás aproximadamente. No idioma da Suméria, na Mesopotâmia, o nome do número 3, "*es*", servia também como a marca da pluralidade (como o sufixo *s* em português). De modo semelhante, estudos etnográficos de 1890 sobre os nativos das ilhas do Estreito de Torres, entre a Austrália e Papua Nova Guiné, mostraram que eles usavam um sistema conhecido como dois-contagem. Eles usavam as palavras "*urapun*" para "um" e "*okasa*" para "dois", e depois combinações como "*okasa-urapun*" para "três" e "*okasa-okasa*" para "quatro". Para números maiores do que quatro, os habitantes da ilha usavam a palavra "*ras*" (muito). Formas quase idênticas de nomenclatura foram encontradas em outras populações indígenas do Brasil (os botocudos) à África do Sul (zulus). Os aranda da Austrália, por exemplo, tinham "*ninta*" para "um", "*tara*" para "dois", e depois "*tara mi ninta*" para "três" e "*tara ma tara*" para "quatro", sendo todos os outros números expressos como "muitos". Muitas dessas populações também tinham tendência a agrupar coisas em pares, em vez de contá-las individualmente.

Uma pergunta interessante é: por que as línguas usadas nesses e em outros sistemas de contagem evoluíram até "quatro" e depois pararam (embora três e quatro já fossem expressos em termos de um e dois)? Uma explicação sugere que isso pode simplesmente refletir o fato de que temos quatro dedos em posição similar em nossas mãos. Outra idéia, mais sutil, sugere que a resposta se encontra num limite fisiológico da percepção visual humana. Muitos estudos mostraram que o número máximo que podemos captar de

relance, *sem contar*, é cerca de quatro ou cinco. Você talvez lembre que, no filme *Rain Man*, Dustin Hoffman interpreta um personagem autista com uma percepção e uma memória extraordinárias (na verdade, bastante exageradas) de números. Em uma cena, todos os palitos de fósforos de uma caixa, com exceção de quatro, caem e se espalham pelo chão, e ele é capaz de dizer num relance que havia 246 palitos no chão. Bem, a maioria das pessoas não conseguiria realizar essa façanha. Qualquer um que já tenha tentado contar votos do que quer que seja está familiarizado com o problema. Normalmente (nos Estados Unidos) anotamos os primeiros quatro votos como linhas retas e depois então cruzamos as linhas com uma quinta linha quando um quinto voto é computado, simplesmente pela dificuldade de perceber de uma só vez qualquer número de linhas acima de quatro.* Este sistema é conhecido em *pubs* ingleses (onde o *barman* conta as cervejas pedidas) como as cinco portas barradas. Curiosamente, uma experiência descrita pelo historiador da matemática Tobias Dantzig (1884-1956) em 1930 (no seu admirável livro *Número, a linguagem da ciência*) sugere que alguns pássaros também podem reconhecer e discriminar até quatro objetos. A história de Dantzig é a seguinte:

> Um fazendeiro estava decidido a atirar num corvo que tinha feito seu ninho numa torre de observação de sua propriedade. Ele havia tentado surpreender o pássaro várias vezes, mas em vão: quando o homem se aproximava, o corvo saía de seu ninho. De uma árvore distante, ele esperava até o homem sair da torre e depois voltava ao seu ninho. Um dia, o fazendeiro topou com um ardil: dois homens entraram na torre, um permaneceu lá dentro e o outro saiu e seguiu em frente. Mas o pássaro não foi enganado: ele ficou afastado até o homem que estava dentro sair. A experiência foi repetida nos dias seguintes com dois, três e depois quatro homens, ainda sem sucesso. Finalmente, cinco homens foram mandados: como antes, todos

*De modo semelhante, no Brasil desenhamos um quadrado com os quatro primeiros votos e uma diagonal com o quinto. (*N. do T.*)

entraram na torre, e um permaneceu enquanto os outros quatro saíam e iam embora. Nesse ponto o corvo perdeu a conta. Incapaz de distinguir entre quatro e cinco, ele prontamente retornou ao seu ninho.

Outras evidências sugerem que os sistemas iniciais de contagem seguiam a filosofia do "um, dois,... muitos". Elas vêm de diferenças lingüísticas entre o tratamento de plurais e de frações. Em hebraico, por exemplo, existe uma forma especial de plural para pares de itens idênticos (por exemplo, mãos, pés) ou para palavras que representam objetos que contêm duas partes idênticas (por exemplo, calças, óculos, tesouras) que é diferente do plural normal. Assim, enquanto o plural normal termina com "im" (para itens considerados masculinos) ou "ot" (para itens femininos), a forma plural para olhos, seios e etc. ou as palavras para objetos com duas partes idênticas terminam em "ayim". Formas semelhantes existem no finlandês e foram usadas (até a época medieval) no tcheco. Mais importante ainda, a transição para frações, que certamente exigiu uma familiaridade maior com números, é caracterizada por uma marcante diferença lingüística entre os nomes de frações que não o meio. Nas línguas indo-européias, e mesmo em outras (como o húngaro e o hebraico), os nomes das frações "um terço" (1/3), "um quinto" (1/5), e assim por diante, geralmente derivam dos nomes dos números dos quais essas frações são recíprocos (três, cinco etc.). No hebraico, por exemplo, o número "três" é "*shalosh*" e "um terço" é "*shlish*". Em húngaro, "três" é "*Hàrom*" e "um terço" é "*Harmad*". Mas isso não vale para o número "meio", que não é relacionado ao dois. Em romeno, por exemplo, "dois" é "*doi*" e "meio" é "*jumate*"; em hebraico, "dois" é "*shtayim*" e "meio" é "*hetsi*"; em húngaro, "dois" é "*kettö*" e "meio" é "*fèl*". Isso pode indicar que, embora o número 1/2 tenha sido entendido relativamente cedo, a noção e a compreensão das outras frações como recíprocos (ou seja, "um sobre") de números inteiros provavelmente só se desenvolveram depois que a contagem passou pela barreira do "três é uma multidão".

CONTANDO MEUS INUMERÁVEIS DEDOS

Mesmo antes de sistemas de contagem terem sido verdadeiramente desenvolvidos, os homens tinham que ser capazes de anotar quantidades. Os registros arqueológicos mais antigos que se acredita serem associados a algum tipo de contagem aparecem na forma de ossos com incisões regularmente espaçadas. O mais antigo, que data de aproximadamente 35000 a.C., é parte de um fêmur de babuíno encontrado numa caverna nas montanhas Lembedo, na África. O osso estava marcado com vinte e nove incisões. Outro desses registros "contábeis", um osso de lobo com cinqüenta e cinco incisões (vinte e cinco numa série e trinta em outra, as primeiras séries agrupadas de cinco em cinco), foi encontrado pelo arqueólogo Karel Absolon em 1937 no Dolné Věstonice, Tchecoslováquia, e data da era Aurignaciana (cerca de 30 mil anos atrás). O agrupamento em cinco, em particular, sugere o conceito de uma *base*, que abordarei adiante. Embora não saibamos o exato propósito dessas incisões, elas podem ter sido feitas como um registro dos abates de um caçador. O agrupamento poderia tê-lo ajudado a manter a contagem sem precisar recontar todos os entalhes. Também foram encontrados ossos marcados de maneira semelhante da era Magdaleniana (cerca de 15000 a.C.), na França e na caverna Pekarna, na República Tcheca.

Um osso que tem sido objeto de muita especulação é o osso de Ishango, encontrado pelo arqueólogo Jean de Heinzelin em Ishango, perto da fronteira entre Uganda e Zaire (Figura 6). Esse cabo de osso de um instrumento, que data de 9000 a.C., aproximadamente, mostra três linhas de entalhes arrumados, respectivamente, nos seguintes grupos: (i) 9, 19, 21, 11; (ii) 19, 17, 13, 11; (iii) 7, 5, 5, 10, 8, 4, 6, 3. A soma dos números nas primeiras duas linhas é de 60 em cada uma, o que levou algumas pessoas a especular que eles podem representar um registro das fases da Lua em dois meses lunares (com a possibilidade de que algumas incisões tenham sido apagadas na terceira linha, que soma apenas 48). Interpretações mais intrincadas (e bem mais especulativas) também foram propostas. Por exemplo, com base no fato de que a segunda linha (19, 17, 13, 11) contém uma seqüência de

números primos (números que não têm divisores, exceto o 1 e o próprio número), e de que a primeira linha (9, 19, 21, 11) contém números que diferem por 1 de 10 ou de 20, Heinzelin concluiu que o povo de Ishango tinha algum conhecimento rudimentar de aritmética e até de números primos. É desnecessário dizer que muitos pesquisadores consideraram essa interpretação um tanto forçada.

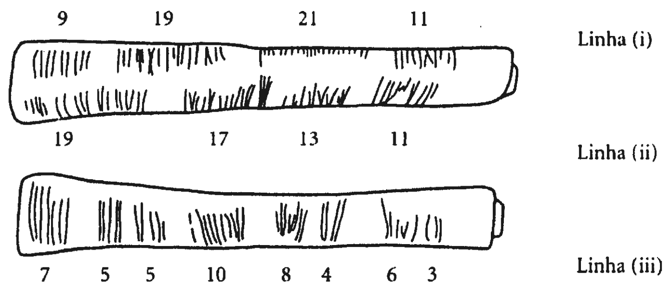


Figura 6

O Oriente Médio produziu outro sistema de registro interessante, que data do período entre 9000 e 2000 a.C. Em lugares que vão de Anatólia, no norte, ao Sudão, no sul, arqueólogos descobriram montes de pequenos objetos parecidos com brinquedos, de diferentes tamanhos e feitos de argila. Tinham a forma de discos, cones, cilindros, pirâmides, animais etc. A arqueóloga Denise Schmandt-Besserat, da Universidade do Texas em Austin, que estudou esses objetos no fim dos anos 1970, desenvolveu uma teoria fascinante. Ela acredita que esses objetos de barro serviam de *símbolos* pictográficos no mercado, representando os tipos de objetos contados. Assim, uma pequena esfera de argila pode ter representado alguma quantidade de grãos, um cilindro, uma cabeça de gado e assim por diante. Os mercadores pré-históricos do Oriente Médio poderiam, portanto, segundo a hipótese de Schmandt-Besserat, conduzir a contabilidade de seus negócios simplesmente alinhando os símbolos de acordo com os tipos de mercadorias negociadas.

Quaisquer que tenham sido os tipos de símbolos usados para os diferentes números — incisões em ossos, representações de argila, nós em cor-

das (artifícios chamados de quipu, usados pelos incas), ou simplesmente os dedos —, em algum ponto da história os humanos encararam o desafio de representar e manipular grandes números. Por razões práticas, nenhum sistema simbólico que tivesse um nome ou objeto representativo diferente e único para cada número poderia sobreviver por muito tempo. Da mesma maneira que as letras do alfabeto representam de algum modo o número mínimo de caracteres com os quais podemos expressar nosso vocabulário inteiro e todo o conhecimento escrito, um conjunto mínimo de símbolos caracterizando todos os números teve de ser adotado. Essa necessidade levou ao conceito de "base" — a noção de que números podem ser arrumados hierarquicamente, de acordo com certas unidades. Temos tanta familiaridade com a base 10 em nossa vida cotidiana que é difícil imaginar que outras bases poderiam ter sido escolhidas.

A idéia por trás da base 10 é realmente muito simples, o que não quer dizer que não tenha levado um longo tempo para se desenvolver. Nós agrupamos os números de tal modo que dez unidades num certo nível correspondem a uma unidade em um nível mais alto na hierarquia. Assim, 10 "uns" correspondem a 1 "dez", 10 "dez" correspondem a 1 "cem", 10 "cens" correspondem a 1 "mil", e assim sucessivamente. Os nomes dos números e o posicionamento dos dígitos também refletem esse agrupamento hierárquico. Quando escrevemos o número 555, por exemplo, embora estejamos repetindo a mesma cifra três vezes, ela significa algo diferente a cada vez. O primeiro dígito da direita representa 5 unidades de "um", o segundo representa 5 unidades de "dez", ou 5 vezes dez, e o terceiro 5 "cens", ou 5 vezes dez ao quadrado. Essa regra importante de posição, o *sistema de valor-de-lugar*, foi inventado pelos babilônios (que usavam 60 como base, como veremos a seguir) por volta de 2000 a.C., e depois, num período de 2.500 anos, foi reinventado sucessivamente na China, pelos maias na América Central, e na Índia.

De todas as línguas indo-européias, o sânscrito, originário da Índia setentrional, é a que fornece alguns dos mais antigos textos escritos. Especificamente, quatro das escrituras antigas do hinduísmo, todas contendo a

palavra em sânscrito "*veda*" (conhecimento) em seus títulos, datam do século V a.C. Cada número de 1 a 10 no sânscrito tem um nome diferente: *eka*, *dvau*, *trayas*, *catvaras*, *pañca*, *ṣaṭ*, *sapta*, *aṣṭau*, *náva*, *dáśa*. Todos os números de 11 a 19 são, simplesmente, combinações entre o número de unidades e 10. Assim, 15 é "*pañca-dáśa*", 19 é "*náva-dáśa*", e assim por diante. O inglês, por exemplo, tem, de modo equivalente, os números terminados em "*teen*". Caso você se pergunte, a propósito, de onde vêm o "*eleven*" e o "*twelve*" do inglês, "*eleven*" deriva de "*an*" (um) e "*lif*" (esquerda ou resto), e "*twelve*", de "*two*" e "*lif*" (dois esquerda). Isto é, esses números representam "um restando de dez" e "dois restando de dez". Novamente como no inglês, os nomes em sânscrito para as dezenas (vinte, trinta etc.) expressam a unidade e o plural para dezena (por exemplo, 60 é *ṣaṣti*), e todas as línguas indo-européias têm uma estrutura bastante semelhante nos seus vocabulários para números. Portanto, os usuários dessas línguas adotaram claramente o sistema de base 10.

Há pouca dúvida de que a popularidade quase universal da base 10 tenha-se originado simplesmente do fato de que temos dez dedos. Essa possibilidade já tinha sido levantada pelo filósofo grego Aristóteles (384-322 a.C.), quando ele se perguntava (em *Problemata*): "Por que todos os homens, tanto os bárbaros como os gregos, contam até dez e não até outro número qualquer?" A base 10, na realidade, não apresenta qualquer superioridade sobre, digamos, a base 13. Poderíamos até argumentar teoricamente que o fato de 13 ser um número primo, somente divisível por 1 e por ele mesmo, lhe confere uma vantagem sobre o 10, pois a maioria das frações seria irredutível nesse sistema. Por exemplo, enquanto na base 10 o número $^{36}/_{100}$ pode ser expresso também como $^{18}/_{50}$ ou $^{9}/_{25}$, essas representações múltiplas não existiriam numa base prima como 13. Mesmo assim a base 10 ganhou, porque os dez dedos se sobressaíam diante dos olhos humanos e eram fáceis de usar. De fato, em algumas línguas da Polinésia-Malásia, a palavra para mão, "*lima*", era a mesma usada para "cinco". Isso significa que todas as civilizações conhecidas escolheram 10 como base? Na verdade, não.

Das outras bases que têm sido usadas por algumas populações ao redor

do mundo, a mais comum é a base 20, conhecida como a base vigesimal. Neste sistema de contagem, que já foi popular em grandes áreas da Europa Ocidental, o agrupamento era baseado no 20, não no 10. É quase certo que a escolha desse sistema vem da combinação dos dedos das mãos com os dos pés para formar uma base maior. Por exemplo, para o povo inuit (esquimó), o número "vinte" é expresso por uma frase com o significado de "um homem é completo". Várias línguas modernas ainda têm traços da base vigesimal. No francês, por exemplo, o número 80 é "*quatre-vingts*" (ou seja, "quatro vintes"), e uma forma arcaica de "*six-vingts*" ("seis vintes") também existiu. Um exemplo ainda mais extremo é fornecido por um hospital do século XIII em Paris, que ainda é chamado de L'Ôpital de Quinze-Vingts (O Hospital de Quinze Vintes), porque foi originalmente projetado para conter 300 camas para veteranos cegos. Do mesmo modo, 40, em irlandês, é chamado de "*daichead*", que é derivado de "*da fiche*" (significando "duas vezes vinte"). Em dinamarquês, os números 60 e 80 ("*tresindstyve*" e "*firsindstyve*", respectivamente, encurtados para "*tres*" e "*firs*") são literalmente "três vintes" e "quatro vintes".

Provavelmente, a base mais espantosa encontrada na Antiguidade (e, na verdade, em qualquer outra época), é a base 60 — o sistema sexagesimal. Este era o sistema usado pelos sumérios na Mesopotâmia, e embora sua origem date de aproximadamente 4000 a.C., essa divisão sobreviveu até hoje na maneira como representamos o tempo em horas, minutos e segundos, bem como nos graus do círculo (e as subdivisões dos graus em minutos e segundos). Como base para um sistema de números, sessenta sobrecarrega consideravelmente o cérebro, já que esse sistema requer, em princípio, um único nome ou símbolo para todos os números de 1 a 60. Cientes dessa dificuldade, os antigos sumérios usavam um certo truque para tornar os números mais fáceis de lembrar — eles inseriram 10 como um passo intermediário. A introdução do 10 lhes permitiu ter nomes únicos para os números de 1 a 10. Os números de 10 a 60 (em unidades de 10) representavam combinações de nomes. Por exemplo, a palavra suméria para 40, "*nišmin*", é uma combinação da palavra para 20, "*niš*", e

a palavra para 2, "*min*". Se escrevermos o número 555 num sistema puramente sexagesimal, o que queremos dizer é $5 \times (60)^2 + 5 \times (60) + 5$, ou 18.305 na nossa notação de base 10.

Surgiram muitas especulações acerca da lógica ou das circunstâncias que levaram os sumérios a escolher a estranha base 60. Algumas se fundamentam nas propriedades matemáticas especiais do número 60: é o primeiro número divisível por 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Outra hipótese tenta relacionar o número 60 a conceitos como o número de meses do ano ou de dias no ano (arredondado para 360), combinados de alguma forma com os números 5 e 6. Mais recentemente, o professor de matemática e escritor francês Georges Ifrah argumentou em seu esplêndido livro *A história universal dos números*, publicado em 2000, que o número 60 pode ter sido conseqüência da mistura de duas populações imigrantes, uma das quais usava a base 5 e a outra, a base 12. A base 5 claramente se originou do número de dedos de uma mão e vestígios desse sistema ainda podem ser encontrados em algumas línguas, como no khmer, no Camboja, e de modo mais acentuado na saraveca, na América do Sul. A base 12, da qual encontramos muitos vestígios ainda hoje — por exemplo, no sistema britânico de pesos e medidas — pode ter sua origem no número de juntas nos quatro dedos (exceto o polegar; este último pode ter sido usado para a contagem).

Aliás, podemos dizer que bases estranhas surgem nos lugares mais curiosos. Em *Alice no País das Maravilhas*, de Lewis Carroll, para ter certeza de que estava entendendo os estranhos acontecimentos à sua volta, Alice diz: "Vou tentar ver se eu sei todas as coisas que eu costumava saber. Deixe-me ver: quatro vezes cinco é doze, e quatro vezes seis é treze, e quatro vezes sete é — ah, não! Eu nunca vou chegar até vinte nessa velocidade!" Em suas notas para o livro de Carroll, *Alice — Edição comentada*, Martin Gardner, o famoso escritor de matemática recreativa, oferece uma boa explicação para a bizarra tábua de multiplicação de Alice. Ele sugere que Alice está simplesmente usando uma base diferente de 10. Por exemplo, se ela usa a base 18, então $4 \times 5 = 20$ realmente será escrito como 12, pois 20 é uma unidade de

18 e 2 unidades de 1. O que torna plausível esta explicação é, obviamente, o fato de que Charles Dodgson ("Lewis Carroll" era seu pseudônimo) dava aulas de matemática em Oxford.

NOSSOS NÚMEROS, NOSSOS DEUSES

Independentemente da base que qualquer uma das civilizações antigas tenha escolhido, o primeiro grupo de números a ser apreciado e entendido em algum nível foi o grupo dos números inteiros (ou números *naturais*). Esses são os familiares 1, 2, 3, 4,... Uma vez absorvida na consciência humana a compreensão desses números como quantidades abstratas, não levou muito tempo para que começassem a lhes atribuir propriedades especiais. Da Grécia à Índia, qualidades e poderes secretos foram creditados aos números. Alguns textos indianos antigos afirmam que números são quase divinos ou "da natureza de Brahma". Esses manuscritos contêm frases que não estão longe de parecerem uma adoração aos números (tal como "Saudemos o Um"). De modo semelhante, um famoso ditado do matemático grego Pitágoras (cuja vida e obra descreveremos mais adiante neste capítulo) sugere que "tudo é arrumado de acordo com números". Essas atitudes levaram, por um lado, a importantes desenvolvimentos na teoria dos números, mas, por outro, ao desenvolvimento da *numerologia* — o conjunto de doutrinas segundo o qual todos os aspectos do universo estão associados a números e suas idiossincrasias. Para o numerólogo, números são realidades fundamentais. Ele extrai significados simbólicos da relação entre o céu e as atividades humanas. Além do mais, essencialmente nenhum número mencionado nas Escrituras Sagradas foi, em momento algum, tratado como irrelevante. Algumas formas de numerologia afetaram nações inteiras. Por exemplo, no ano de 1240, cristãos e judeus na Europa Ocidental esperaram a chegada de algum rei messiânico do Leste, pois aconteceu de o ano 1240 no calendário cristão corresponder ao ano 5000 no calendário judaico. Antes de descartarmos esses sentimentos como ingenuidade romântica que só

poderia ter existido muitos séculos atrás, devemos relembrar toda a extravagante comoção que envolveu o término do último milênio.

Uma versão especial da numerologia é a Gematria judaica (termo possivelmente originado de "número geométrico" em grego), ou seus análogos muçulmanos e gregos, conhecidos como Khisab al Jumal ("calculando o total") e Isopsephy (do grego "*isos*", igual, "*psēphizein*", contar), respectivamente. Nesses sistemas, são atribuídos números a cada letra do alfabeto de uma língua (em geral, hebraico, grego, árabe ou latim). Adicionando os valores das letras constituintes, números são então associados a palavras ou mesmo a frases inteiras. A Gematria era especialmente popular no sistema místico judaico praticado sobretudo do século XIII ao XVIII conhecido como Cabala. Sábios judeus costumavam às vezes maravilhar seus ouvintes dizendo em voz alta uma série de números aparentemente aleatórios por uns dez minutos e depois repetindo a série sem um erro. Esse feito era conseguido simplesmente pela tradução de alguma passagem das escrituras hebraicas na linguagem da Gematria.

Um dos exemplos mais famosos de numerologia é associado ao 666, "o número da Besta". A "Besta" foi identificada como Anticristo. Um texto no Livro das Revelações (13:18) diz: "Isso pede sabedoria: deixemos qualquer um com entendimento calcular o número da besta, pois é o número de um homem. Seu número é seiscentos e sessenta e seis". A frase "é o número de um homem" fez com que muitos dos místicos cristãos tentassem identificar figuras históricas cujos nomes em Gematria ou Isopsephy davam o valor 666. Essas buscas levaram, entre outros, a nomes como o de Nero César e do imperador Diocleciano, que perseguiram cristãos. Em hebraico, Nero César era escrito (da direita para a esquerda): נרון קסר, e os valores numéricos atribuídos na Gematria às letras hebraicas (da direita para a esquerda) — 50, 200, 6, 50; 100, 60, 200 — somam 666. De forma semelhante, quando só as letras que também são numerais romanos (D, I, C, L, V) são contadas no nome em latim do imperador Diocleciano, DIOCLES AVGVSTVS, elas também somam 666 (500 + 1 + 100 + 50 + 5 + 5 + 5). Obviamente essas associações são não apenas fantasiosas, como também algo

forçadas (por exemplo, a grafia em hebraico da palavra César na verdade omite uma letra, de valor 10, da grafia mais comum).

Surpreendentemente, em 1994 foi "descoberta" uma relação (e publicada no *Journal of Recreational Mathematics*) até entre "o número da Besta" e a Razão Áurea. Com uma calculadora científica de bolso, você pode usar as funções trigonométricas seno e co-seno para calcular o valor da expressão [sen 666° + cos (6 × 6 × 6)°]. Simplesmente, digite 666 e aperte o botão [sen] e salve o número, depois digite 216 (= 6 × 6 × 6) e aperte o botão [cos], e some o número obtido com o número salvo. O número que você vai obter será uma boa aproximação do negativo de Fi. Casualmente, o presidente Ronald Reagan e Nancy Reagan mudaram seu endereço na Califórnia de 666 *St. Cloud Road* para 668 para evitar o número 666, e 666 também era a combinação da mala misteriosa no filme "Pulp Fiction", de Quentin Tarantino.

Uma fonte óbvia da atitude mística em relação aos números inteiros foi a manifestação desses números nos corpos humanos e dos animais e no cosmo, tal como percebido pelas culturas antigas. Além do fato de os humanos terem o número 2 exibido por todo o corpo (olhos, mãos, narinas, pés, orelhas etc.), também existem dois gêneros, existe o sistema Sol-Lua, e assim por diante. Mais ainda, nosso tempo subjetivo é dividido em três tempos (passado, presente, futuro) e, devido ao fato de que o eixo de rotação da Terra permanece mais ou menos apontado na mesma direção (aproximadamente na direção da estrela do Norte, Polaris, embora existam pequenas variações, como descrito no Capítulo 3), o ano é dividido em quatro estações. As estações simplesmente refletem o fato de que a orientação do eixo da Terra em relação ao Sol muda durante o curso do ano. Quanto mais diretamente uma parte da Terra é exposta à luz solar, mais longa é a duração do dia e maior é a temperatura. Em geral, números funcionavam em muitas circunstâncias como os mediadores entre os fenômenos cósmicos e a vida cotidiana dos homens. Por exemplo, os nomes dos sete dias da semana eram baseados nos nomes dos objetos celestes inicialmente considerados planetas: o Sol, a Lua, Marte, Mercúrio, Júpiter, Vênus e Saturno.

Os próprios números inteiros são divididos entre ímpares e pares, e ninguém fez mais para enfatizar as diferenças entre os números ímpares e pares e associar toda uma mistura variada de propriedades a essas diferenças do que os pitagóricos. Especificamente, veremos que podemos identificar a fascinação pitagórica pelo número 5 e sua admiração pela estrela de cinco pontas com o ímpeto inicial do interesse pela Razão Áurea.

PITÁGORAS E OS PITAGÓRICOS

Pitágoras nasceu por volta de 570 a.C. na ilha de Samos, no mar Egeu (a alguma distância da Ásia Menor), e emigrou em algum momento entre 530 e 510 para Crotona, na colônia dória no sul da Itália (então conhecida como *Magna Graecia*). Pitágoras aparentemente saiu de Samos para escapar da tirania sufocante de Polícrates (morto por volta de 522 a.C.), que estabeleceu uma supremacia naval sâmia no mar Egeu. Talvez seguindo o conselho de seu suposto professor, o matemático Tales de Mileto, Pitágoras tenha vivido durante algum tempo (uns vinte e dois anos, segundo alguns relatos) no Egito, onde ele teria aprendido Matemática, Filosofia e temas religiosos com os sacerdotes egípcios. Depois que o Egito foi esmagado pelas forças persas, Pitágoras pode ter sido levado para a Babilônia junto com alguns membros do clero. Lá ele teria travado contato com o conhecimento matemático mesopotâmico. Mesmo assim, a matemática egípcia e a babilônica se mostrariam insuficientes para a mente inquisitiva de Pitágoras. Para esses dois povos, a matemática fornecia ferramentas práticas na forma de "receitas" destinadas a cálculos específicos. Pitágoras, por outro lado, era um dos primeiros a compreender os números como entidades abstratas que existem por si mesmos.

Na Itália, Pitágoras começou a dar aulas de Filosofia e Matemática, atraindo rapidamente uma multidão entusiástica de seguidores, que pode ter incluído a jovem e bela Theano (filha de seu anfitrião Milo), com quem mais tarde ele se casou. A atmosfera em Crotona provou ser extremamente

fértil para os ensinamentos de Pitágoras, já que a comunidade ali era formada por uma grande quantidade de cultos semimísticos. Pitágoras estabeleceu uma rígida rotina para seus alunos, dando especial atenção à hora de caminhar e à hora de ir dormir. Os estudantes eram aconselhados a repetir os versos ao acordar:

Em ordem ponha, assim que acordar
As ações a fazer no dia a começar.

Do mesmo modo, ao anoitecer, eles deveriam recitar:

Não deixe o sono seus olhos fechar
Antes de três vezes você refletir
Sobre as ações que neste dia esteve a realizar
Quais foram bem, quais não, e o que vem a seguir?

A maior parte dos detalhes da vida de Pitágoras e a realidade de suas contribuições matemáticas permanecem sob o véu da incerteza. Conta uma lenda que ele tinha uma marca de nascença dourada na coxa, que seus seguidores consideravam uma indicação de que ele era um filho do deus Apolo. Nenhuma das biografias de Pitágoras escritas na Antiguidade foi preservada, e biografias escritas mais tarde, como *As vidas de filósofos eminentes*, escrita por Diógenes Laércio no século III, freqüentemente se baseavam em muitas fontes de credibilidade variável. Pitágoras, aparentemente, não escreveu nada; mesmo assim, sua influência era tão grande que seus seguidores mais aplicados formaram uma sociedade secreta, ou irmandade, e eram conhecidos como os pitagóricos. Aristipo de Cirene conta em seu *Relatos de filósofos naturais* que Pitágoras derivou seu nome do fato de que ele estava falando (*agoreuein*) a verdade como Deus em Delfo (*tou Pythiou*).

Os fatos acerca da morte de Pitágoras são tão imprecisos quanto os fatos sobre sua vida. De acordo com uma história, a casa na qual ele ficava em Crotona foi incendiada por uma turba, invejosa da elite pitagórica, e

Pitágoras foi assassinado durante a fuga, ao chegar a um lugar cheio de grãos no qual ele não iria pisar. Uma versão diferente é dada pelo cientista e filósofo grego Dicaearco de Messana (cerca de 355-280 a.C.), que afirma que Pitágoras conseguiu fugir até o Templo das Musas em Metaponto, onde ele morreu depois de quarenta dias de fome auto-imposta. Uma história completamente diferente é contada por Hermipo. Segundo ele, Pitágoras foi morto pelos siracusanos em sua guerra contra o exército de Agrigento, ao qual Pitágoras se juntara.

Embora seja quase impossível atribuir com certeza qualquer feito matemático ao próprio Pitágoras ou aos seus seguidores, não há dúvida de que eles foram responsáveis por uma mistura de Matemática, filosofia de vida e religião sem paralelo na história. A esse respeito, talvez seja interessante observar a coincidência de Pitágoras ter sido contemporâneo de Buda e de Confúcio.

De fato, atribui-se a Pitágoras a invenção das palavras "filosofia" ("amor pela verdade") e "matemática" ("aquilo que é aprendido"). Para ele, um "filósofo" era alguém que "se dedicava a descobrir o significado e o objetivo da vida... a revelar os segredos da natureza". Pitágoras dizia que aprender era mais importante do que todas as outras atividades, pois, em suas palavras, "a maioria dos homens e mulheres, por nascimento ou natureza, não tem os meios para progredir na riqueza e no poder, mas todos têm a capacidade de progredir no conhecimento". Ele também era famoso por introduzir a doutrina da metempsicose — de que a alma é imortal e renasce ou *transmigra* em encarnações humanas e animais. Esta doutrina resultou em uma firme defesa do vegetarianismo, já que animais destinados ao abate poderiam ser reencarnações de amigos mortos. Para purificar a alma, os pitagóricos estabeleciam regras rígidas, que incluíam, por exemplo, a proibição de comerem grãos e uma ênfase extrema no treino da memória. Em seu tratado *Sobre os pitagóricos*, o famoso filósofo grego Aristóteles dá várias razões possíveis para a abstinência de grãos: eles se assemelham a genitais; sendo plantas sem órgãos eles são como as portas do inferno; supõe-se que os grãos surgiram ao mesmo tempo que os homens no ato da criação universal; ou grãos eram usados em eleições em governos oligárquicos.

Pitágoras e os pitagóricos são mais conhecidos pelo seu suposto papel no desenvolvimento da matemática e pela aplicação da matemática ao conceito de ordem, seja a ordem musical, a ordem do cosmo ou até mesmo ética. Toda criança aprende na escola o Teorema de Pitagóras sobre um triângulo que tem um ângulo reto (90 graus), um triângulo retângulo. De acordo com esse teorema (Figura 7, à direita), a área do quadrado construído sobre o lado mais comprido (a hipotenusa) é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os dois lados menores. Em outras palavras, se o comprimento da hipotenusa é c, então a área do quadrado construído sobre ela é c^2; as áreas dos quadrados construídos sobre os outros dois lados (de comprimentos a e b) são a^2 e b^2, respectivamente. O Teorema de Pitágoras pode, portanto, ser expresso como $c^2 = a^2 + b^2$ para todos os triângulos retângulos. Em 1971, quando a República da Nicarágua selecionou as dez equações matemáticas que mudaram a face da Terra como tema para uma série de selos, o Teorema de Pitágoras apareceu no segundo selo. Os números 3, 4, 5 ou 7, 24, 25, por exemplo, formam triplas pitagóricas, pois $3^2 + 4^2 = 5^2$ ($9 + 16 = 25$), $7^2 + 24^2 = 25^2$ ($49 + 576 = 625$), e eles podem ser usados como os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo.

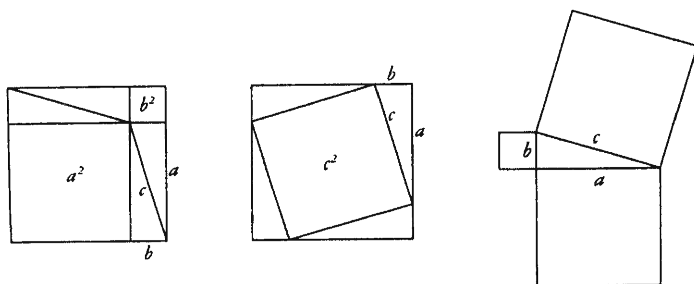


Figura 7

A Figura 7 também sugere o que talvez seja a prova mais fácil do Teorema de Pitágoras: por um lado, quando se subtrai do quadrado cujo lado é igual

a $a + b$ a área de quatro triângulos idênticos, tem-se o quadrado construído sobre a hipotenusa (figura do meio). Por outro lado, quando se subtrai do mesmo quadrado os mesmos quatro triângulos num arranjo diferente (figura da esquerda), tem-se os dois quadrados construídos sobre os lados menores. Assim, o quadrado sobre a hipotenusa é claramente igual em área à soma dos dois quadrados menores. Em seu livro *A proposição pitagórica*, de 1940, a matemática Elisha Scott Loomis apresentou 367 provas do Teorema de Pitágoras, incluindo provas de Leonardo da Vinci e do vigésimo presidente dos Estados Unidos, James Garfield.

Embora o Teorema de Pitágoras ainda não fosse conhecido como uma "verdade" caracterizando todos os triângulos retângulos, triplas pitagóricas foram reconhecidas muito antes de Pitágoras. Uma tabuleta de argila babilônica do período babilônico antigo (cerca de 1600 a.C.) contém quinze dessas triplas.

Os babilônios descobriram que as triplas pitagóricas podem ser construídas com o uso do seguinte procedimento simples, ou "algoritmo". Escolha dois números inteiros p e q de modo que p seja maior do que q. Você pode formar agora as triplas pitagóricas $p^2 - q^2$; $2pq$; $p^2 + q^2$. Por exemplo, suponha que q seja 1 e p seja 4. Então $p^2 - q^2 = 4^2 - 1^2 = 16 - 1 = 15$; $2pq = 2 \times 4 \times 1 = 8$; $p^2 + q^2 = 4^2 + 1^2 = 16 + 1 = 17$. O conjunto de números 15, 8, 17 é uma tripla pitagórica, porque $15^2 + 8^2 = 17^2$ ($225 + 64 = 289$). Você pode facilmente mostrar que isso irá funcionar para quaisquer números inteiros p e q. (Para o leitor interessado, uma prova curta é apresentada no Apêndice 1.) Portanto, existe um número infinito de triplas pitagóricas (um fato provado por Euclides de Alexandria).

No entanto, no mundo pitagórico, padrões ordenados não eram restritos a triângulos e geometria. Tradicionalmente, atribui-se a Pitágoras a descoberta das progressões harmônicas nas notas da escala musical, por observar que os intervalos musicais e o tom das notas correspondiam aos comprimentos relativos das cordas que vibravam. Ele observou que dividindo uma corda em inteiros consecutivos produzia (até certo ponto) intervalos harmoniosos e agradáveis (consonantes). Quando duas notas musicais arbitrá-

rias são tocadas juntas, o som resultante costuma ser áspero (dissonante) ao ouvido. Apenas algumas combinações produzem sons agradáveis. Pitágoras descobriu que essas consonâncias raras são obtidas quando as notas são produzidas por cordas similares, cujos comprimentos estão em proporções dadas pelos primeiros números inteiros. O uníssono é obtido quando as cordas são do mesmo tamanho (uma proporção 1:1). Uma oitava é obtida por uma proporção 1:2 do comprimento das cordas. A quinta, por 2:3, e a quarta, por 3:4. Em outras palavras, você pode puxar uma corda e fazer soar uma nota. Se você puxar uma corda igualmente esticada que tem metade do comprimento, você ouvirá uma nota que é exatamene uma oitava harmônica acima da primeira. Do mesmo modo, 6/5 de um dó dá a nota lá, 4/3 dá a nota sol, 3/2 dá a nota fá, e assim por diante. Esses notáveis achados iniciais formaram a base para uma compreensão mais avançada de intervalos musicais que se desenvolveu no século XVI (na qual, por acaso, Vincenzo Galilei, pai de Galileu, estava envolvido). Uma maravilhosa ilustração de autoria de Franchinus Gafurius, que apareceu como um frontispício em *Theorica Musice* em 1492, mostra Pitágoras experimentando os sons de vários objetos, entre eles martelos, cordas, sinos e flautas (Figura 8; o lado esquerdo superior representa a figura bíblica de Jubal ou Tubal, "o pai de tudo o que maneja harpa e órgão". Mas, indagavam os pitagóricos, se a harmonia musical pode ser expressa por números, por que não o cosmo inteiro? Portanto, eles concluíram que todos os objetos no Universo deviam suas características à natureza do número. Observações astronômicas sugeriam, por exemplo, que os movimentos no céu também eram extremamente regulares e sujeitos a uma ordem específica. Isso levou ao conceito de uma bela "harmonia das esferas" — a noção de que, em seus movimentos regulares, corpos celestes também poderiam criar música harmônica. O filósofo Porfírio (c. 232-304 d.C.), que escreveu mais de setenta livros sobre história, metafísica e literatura, também escreveu (como parte de sua obra em quatro volumes *História da filosofia*) uma curta biografia de Pitágoras intitulada *Vida de Pitágoras*. Nela, Porfírio diz a respeito de Pitágoras: "Ele próprio podia ouvir a harmonia do Universo, e entendia a música das esfe-



Figura 8

ras e as estrelas que se movem em concerto com elas, e que não podemos ouvir por causa das limitações de nossa natureza débil." Após enumerar outras qualidades requintadas de Pitágoras, Porfírio continua: "Pitágoras afirmou que as Nove Musas eram constituídas pelos sons feitos pelos sete planetas, pela esfera das estrelas fixas e por aquela que é oposta à nossa terra, chamada de 'contraterra'" (esta última, segundo a teoria pitagórica do universo, girava em oposição à Terra, ao redor de um fogo central). O conceito de uma "harmonia das esferas" foi elaborado novamente, mais de vinte séculos depois, pelo famoso astrônomo Johannes Kepler (1571-1630). Tendo testemunhado em sua própria vida muita agonia e os horrores da guerra, Kepler concluiu que a Terra realmente criou duas notas, *mi* de miséria, e *fa* de fome ("*fames*" em latim). Nas palavras de Kepler: "a Terra canta MI FA MI, de modo que, mesmo da sílaba, pode-se inferir, nesta nossa casa, Miséria e Fome mantêm poder".

A obsessão pitagórica pela matemática foi um tanto ridicularizada pelo grande filósofo grego Aristóteles. Ele escreve em *Metafísica* (no século IV a.C.): "Os chamados pitagóricos dedicavam-se à Matemática e foram os primeiros a desenvolver esta ciência e, penetrando nela, chegaram a imaginar que seus princípios eram os princípios de todas as coisas". Hoje, embora possamos nos divertir com algumas de suas idéias fantasiosas, temos de reconhecer que o pensamento fundamental por trás delas não é muito diferente do que foi expresso por Albert Einstein (em *Cartas a Solovine*): "A matemática é apenas um meio de expressar as leis que regem fenômenos." De fato, as leis da física, às vezes chamadas de "leis da natureza", simplesmente representam formulações matemáticas de comportamentos que no-

tamos que são obedecidos por todos os fenômenos naturais. Por exemplo, a idéia central da teoria da Relatividade Geral de Einstein é que a gravidade não é uma força misteriosa, atrativa, que age através do espaço, mas sim uma manifestação da geometria de espaço e tempo inextricavelmente ligados. Deixe-me explicar, usando um exemplo simples, como uma propriedade geométrica de espaço poderia ser percebida como uma força atrativa como a gravidade. Imagine duas pessoas que começam a viajar exatamente em direção ao norte a partir de diferentes pontos do equador da Terra. Isto significa que, de seus pontos de partida, essas pessoas viajam ao longo de linhas paralelas (duas longitudes), que, de acordo com a geometria que aprendemos na escola, nunca deveriam se encontrar. No entanto, essas duas pessoas irão se encontrar no Pólo Norte. Se essas pessoas não soubessem que estavam na realidade viajando pela superfície curva de uma esfera, elas poderiam concluir que estavam experimentando alguma força atrativa, pois chegaram ao mesmo ponto apesar de terem começado a se mover ao longo de linhas paralelas. Portanto, a curvatura geométrica do espaço pode se manifestar como uma força atrativa. Os pitagóricos provavelmente foram os primeiros a reconhecer o conceito abstrato de que as *forças* básicas do Universo podem ser expressas por meio da linguagem da Matemática.

Talvez devido às simples razões harmônicas encontradas na música, 1:2, 2:3, 3:4, os pitagóricos ficaram particularmente intrigados com as diferenças entre os números ímpares e pares. Eles associaram aos números ímpares atributos masculinos e, de modo um tanto preconceituoso, também luz e bondade, ao passo que deram aos números pares atributos femininos e associaram a eles escuridão e maldade. Alguns desses preconceitos com relação a números pares e ímpares persistiram durante séculos. Por exemplo, o sábio romano Plínio, o Velho, que viveu entre 23 e 79 d.C., escreveu em sua *Historia Naturalis* (uma enciclopédia de trinta e sete volumes sobre história natural): "Por que é que nutrimos a crença de que, para todos os propósitos, os números ímpares são os mais efetivos?" De forma semelhante, em *Merry Wives of Windsor* (*As alegres comadres de Windsor*), de Shakespeare (Ato V, Cena I), *sir* John Falstaff diz: "Eles dizem que há divindade nos

números ímpares, seja na natividade, na sorte ou na morte." Religiões do Oriente Médio geraram atitude semelhante. Segundo a tradição muçulmana, o profeta Maomé comia nos dias de número ímpar para quebrar seu jejum, e orações judaicas freqüentemente têm um número ímpar (3, 7) de repetições associado a elas.

Além dos papéis que os pitagóricos atribuíram aos números ímpares e pares em geral, eles também atribuíram propriedades especiais a alguns números isolados. O número 1, por exemplo, era considerado o gerador de todos os outros números e portanto não era visto propriamente como um número. Supunha-se também que ele caracterizava a razão. Geometricamente, o número 1 era representado pelo ponto, que, em si mesmo, era considerado o gerador de todas as dimensões. O número 2 era o primeiro número feminino e também o número da opinião e da divisão. Sentimentos um tanto semelhantes eram expressos no Yin e Yang da cosmologia religiosa chinesa, com o Yin representando o princípio feminino e negativo, como passividade e escuridão, e o Yang representando o princípio da claridade e masculino. O número 2 está associado ainda hoje em muitas línguas a hipocrisia e desconfiança, como se pode constatar em expressões como "duas caras" (em iraniano) ou "de língua dupla" (em alemão e árabe). A identificação original do número 2 com o feminino e o 3 com o masculino pode ter sido inspirada pelas configurações dos seios femininos e da genitália masculina. Essa argumentação tem suporte no fato de que o konso na África Oriental faz a mesma identificação. Na vida cotidiana, divisão em duas categorias é o mais comum: bom e mau, em cima e embaixo, direita e esquerda. Geometricamente, o 2 era expresso por uma linha (que é determinada por dois pontos), que tem uma dimensão. Supunha-se que 3 era o primeiro número masculino real e também o número da harmonia, pois combina unidade (o número 1) com divisão (o número 2). Para os pitagóricos, 3 era, em certo sentido, o primeiro número real, pois tinha um "começo", um "meio" e um "fim" (diferentemente do 2, que não tem meio). A expressão geométrica do 3 era o triângulo, pois três pontos que não estejam na mesma linha determinam um triângulo, e a área do triângulo tem duas dimensões.

É interessante notar que 3 era também a base para a construção de unidades militares na Bíblia. Por exemplo, em II Samuel 23, há uma história sobre a própria unidade básica, os "três guerreiros" que o rei Davi tinha. No mesmo capítulo, há um relato detalhado dos "trinta chefes" que "foram se juntar a Davi na caverna de Adulam", mas no fim do relato o redator bíblico conclui que eles eram "trinta e sete no total". Claramente, "trinta" era a definição de unidade, mesmo que o verdadeiro número de membros fosse um tanto diferente. Em Juízes 7, quando Gedeão precisa lutar contra os medianitas, ele escolhe trezentos homens, "todos aqueles que sorvem a água com suas línguas". Indo para unidades ainda maiores, em I Samuel 13, "Saul escolhe três mil de Israel" para lutar contra os filisteus, que ao mesmo tempo "juntaram para lutar contra Israel trinta mil carros de guerra". Finalmente, em II Samuel 6, "Davi novamente juntou todos os homens escolhidos de Israel, trinta mil", para lutar contra os filisteus.

O número 4, para os pitagóricos, era o número da justiça e da ordem. Na superfície da Terra, os quatro ventos ou direções forneciam a necessária orientação aos humanos para identificar suas coordenadas no espaço. Geometricamente, quatro pontos que não estão no mesmo plano podem formar um tetraedro (uma pirâmide com quatro lados triangulares), que tem um volume em três dimensões. Outro fator que deu ao número 4 um *status* um tanto especial para os pitagóricos foi a atitude deles em relação ao número 10, ou o sagrado *tetractys*. Dez era o número mais reverenciado, pois representava o cosmo como um todo. O fato de que 1 + 2 + 3 + 4 = 10 gerou uma associação estreita entre 10 e 4. Ao mesmo tempo, essa relação significava que o 10 não só unia os números que representam todas as dimensões, mas também combinava todas as propriedades de unicidade (como expresso pelo 1), polaridade (expresso pelo 2), harmonia (expresso pelo 3) e espaço e matéria (expresso pelo 4). O dez era, portanto, o número de *tudo*, cujas propriedades são bem descritas pelo pitagórico Filolaus por volta de 400 a.C.: "sublime, potente e criador de tudo, o começo e o guia do divino no que concerne à vida na Terra".

O número 6 era o primeiro número *perfeito*, e o número da criação. O adjetivo "perfeito" era anexado a números que eram exatamente iguais à soma de todos os seus divisores (números que os dividem sem resto) exceto ele mesmo, como 6 = 1 + 2 + 3. O próximo número desse tipo é, a propósito, 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14, seguido de 496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248; quando chegamos ao nono número perfeito, ele contém 37 dígitos. Seis também é o produto do primeiro número feminino, 2, e o primeiro número masculino, 3. O filósofo judeu helenista Filo Judaeus de Alexandria (cerca de 20 a.C. — 40 d.C.), cuja obra juntou a filosofia grega e as escrituras hebraicas, sugeriu que Deus criou o mundo em seis dias porque seis era um número perfeito. A mesma idéia foi aperfeiçoada por Santo Agostinho (354-430) em *A cidade de Deus*: "Seis é um número perfeito em si mesmo, e não porque Deus criou o mundo em seis dias; é o contrário: Deus criou o mundo em seis dias porque esse número é perfeito, e continuaria perfeito, mesmo que o trabalho dos seis dias não existisse." Alguns comentadores da Bíblia também consideraram o 28 um número básico do Arquiteto Supremo, apontando para os 28 dias do ciclo lunar. A fascinação por números perfeitos penetrou até no judaísmo, e estudos a respeito deles foram defendidos no século XII pelo rabino Yosef ben Yehudah Aknin no seu livro *Cura dos espíritos*.

Deixei deliberadamente o número 5 por último ao dar esses exemplos da atitude dos pitagóricos em relação aos números porque esse número também nos leva às origens da Razão Áurea. O cinco representava a união do primeiro número feminino, 2, com o primeiro número masculino, 3, e, como tal, era o número do amor e do casamento. Aparentemente, os pitagóricos usavam o pentagrama — a estrela de cinco pontas (Figura 3) — como o símbolo de sua irmandade e o chamavam de "Saúde". O escritor e retórico grego Luciano, do século II, escreve (no *Em defesa de um deslize da língua na saudação*):

> De qualquer modo, toda sua [de Pitágoras] escola, em cartas sérias entre si, começava diretamente com "Saúde para você", como uma saudação mais

> adequada ao corpo e ao espírito, abrangendo todos os bens humanos. De fato, o Pentagrama, a tripla interseção do triângulo que eles usavam como um símbolo de sua seita, eles o chamavam de "Saúde".

Uma explicação imaginativa (embora talvez não totalmente sólida) para a associação do pentagrama com saúde foi sugerida por A. de la Fuÿe em 1934, em seu livro *Le Pentagramme Pythagoricien, Sa Diffusion, Son Emploi dans le Syllabaire Cuneiform* (O Pentagrama Pitagórico, sua difusão, seu uso na cartilha cuneiforme). De la Fuÿe sugeriu que o pentagrama simbolizava a deusa grega da saúde, Hygeia, através de uma correspondência das cinco pontas da estrela com uma representação esquemática da deusa (Figura 9).

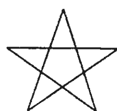




Figura 9

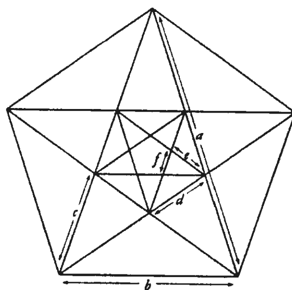


Figura 10

O pentagrama também tem relação estreita com o pentágono regular — a figura plana que tem cinco lados e ângulos iguais (Figura 10). Conectando-se todos os vértices do pentágono por diagonais, obtém-se um pentagrama. As diagonais também formam um pentágono menor no centro, e as diagonais desse pentágono formam um pentagrama e um pentágono ainda menor (Figura 10). Essa progressão pode prosseguir *ad infinitum*, criando pentágonos e pentagramas cada vez menores. Uma propriedade notável de todas essas figuras é que, se olharmos os segmentos de linha em ordem decrescente de comprimento (aqueles marcados com *a, b, c, d, e, f* na figura), poderemos provar facilmente, usando geo-

metria elementar, que *cada segmento é menor que seus antecessor por um fator que é exatamente igual à Razão Áurea,* Φ. Isto é, a razão entre os comprimentos de *a* e *b* é Φ, a razão entre *b* e *c* é Φ, e assim por diante. Mais importante ainda, podemos usar o fato de que o processo de criar uma série de pentágonos e pentagramas encaixados pode ser continuado indefinidamente com tamanhos cada vez menores, para provar rigorosamente que a diagonal e o lado do pentágono são incomensuráveis, isto é, a razão entre seus comprimentos (que é igual a Φ) não pode ser expressa como a razão entre dois números inteiros. Isto quer dizer que a diagonal e o lado do pentágono não podem ter uma medida comum, de tal forma que a diagonal seja algum múltiplo inteiro dessa medida e o lado também seja algum múltiplo inteiro da mesma medida. (Para os leitores com mais inclinação matemática, a prova é apresentada no Apêndice 2.) Lembre-se de que números que não podem ser expressos como a razão entre dois números inteiros (ou seja, como frações, ou números racionais) são conhecidos como números irracionais. Esta prova, portanto, estabelece o fato de que Φ é um número irracional.

Muitos pesquisadores (entre eles Kurt von Fritz, em seu artigo intitulado "A descoberta da incomensurabilidade por Hipaso de Metaponto", publicado em 1945) sugerem que os pitagóricos foram os primeiros a descobrir a Razão Áurea e a incomensurabilidade. Esses historiadores da matemática afirmavam que a preocupação pitagórica com o pentagrama e o pentágono, combinada com o conhecimento geométrico que havia no meio do século V a.C., tornou plausível que os pitagóricos, e, em particular, talvez Hipaso de Metaponto, tenham descoberto a Razão Áurea e, através dela, a incomensurabilidade. Os argumentos parecem ser pelo menos parcialmente sustentados pelos textos do fundador da escola síria de Neoplatonismo, Iâmblico (c. 245-325 d.C.). De acordo com um dos relatos de Iâmblico, os pitagóricos erigiram uma lápide para Hipaso, como se ele estivesse morto, por causa da descoberta devastadora da incomensurabilidade. Em outro lugar, porém, Iâmblico relata que:

> Está relacionado a Hipaso que ele era um pitagórico e que, pelo fato de ter sido ele o primeiro a publicar e descrever a esfera dos doze pentágonos, pereceu no mar por sua impiedade, mas recebeu o crédito pela descoberta, embora, realmente, tudo pertença a ELE (pois desse modo eles se referiam a Pitágoras, e eles não o chamavam pelo nome).

Na frase "descreveu a esfera dos doze pentágonos", Iâmblico se refere (de modo um tanto vago, já que a figura não é realmente uma esfera) à construção do dodecaedro, um sólido com doze faces, cada uma das quais é um pentágono, que é um dos cinco sólidos conhecidos como sólidos platônicos. Os sólidos platônicos estão intimamente ligados à Razão Áurea, e voltaremos a eles no Capítulo 4. Apesar do tom um tanto mítico desses relatos, o historiador matemático Walter Burkert conclui em seu livro *Tradição e ciência no pitagorismo antigo*, de 1972, que "a tradição a respeito de Hipaso, mesmo que cercada de lenda, faz sentido". A razão principal para essa afirmação é fornecida pela Figura 10 (e pelo Apêndice 2). A conclusão de que a diagonal e o lado de um pentágono regular são incomensuráveis é baseada na observação muito simples de que a construção de pentágonos cada vez menores pode prosseguir indefinidamente. A prova poderia, portanto, ter sido realmente acessível aos matemáticos do século V a.C.

PARA O SER RACIONAL, SOMENTE O IRRACIONAL É INTOLERÁVEL

Embora certamente seja possível (e talvez até provável) que a incomensurabilidade e os números irracionais tenham sido descobertos via Razão Áurea, a opinião mais tradicional é de que esses conceitos foram primeiramente observados por meio da razão entre a diagonal e o lado do quadrado. Aristóteles escreve em *Analítica Anterior* que: "a diagonal [de um quadrado] é incomensurável [com o lado], porque números ímpares serão iguais aos pares se se supõe que sejam comensuráveis." Aristóteles alude aqui a uma

prova da incomensurabilidade, que apresentarei agora em detalhe, pois é um belo exemplo de demonstração pelo método lógico conhecido como *reductio ad absurdum* (redução ao absurdo). De fato, em 1988, quando o periódico *The Mathematical Intelligencer* convidou seus leitores a selecionar vinte e quatro teoremas de acordo com sua "beleza", a prova que estou para apresentar ficou em sétimo lugar na lista.

A idéia por trás do método engenhoso do *reductio ad absurdum* é que se prova uma proposição simplesmente mostrando a falsidade de sua contraposição. O mais influente sábio judeu da Idade Média, Maimônides (Moses Ben Maimon, 1135-1204), tentou até usar esse artifício lógico para provar a existência de um criador. Em sua obra monumental, *Mishne Tora* (A Torá Revista), que tenta abranger todos os assuntos religiosos, Maimônides escreve: "O princípio básico é que existe um Primeiro Ser que transformou todas as coisas existentes em seres, porque, se se supuser que ele não existiu, então nada mais poderia existir." Na Matemática, uma prova por absurdo é usada da seguinte forma. Começa-se supondo que o teorema que se quer provar na verdade é falso. A partir disso, por uma série de passos lógicos, você deriva algo que representa uma clara *contradição* lógica, como 1 = 0. Conclui-se, assim, que o teorema original não poderia ser falso; portanto, tem que ser verdadeiro. Note que para esse método funcionar, deve-se supor que um teorema ou uma afirmação têm que ser *ou verdadeiros ou falsos* — ou você está lendo esta página agora ou não está.

Examine primeiro o quadrado na Figura 11, no qual o comprimento do lado é uma unidade. Se quisermos achar o comprimento da diagonal, podemos usar o teorema de Pitagóras em qualquer dos dois triângulos retângulos nos quais o quadrado é dividido. Lembre-se de que o teorema afirma que o quadrado da hipotenusa (a diagonal) é igual à soma dos quadrados dos dois lados menores do triângulo. Se chamarmos o comprimento da hipotenusa de *d*, temos $d^2 = 1^2 + 1^2$, ou $d^2 = 1 + 1 = 2$. Se conhecemos

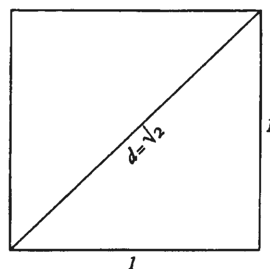


Figura 11

o quadrado de um número, encontramos o próprio número tirando a raiz quadrada. Por exemplo, se soubermos que o quadrado de x é igual a 25, então $x = 5 = \sqrt{25}$. De $d^2 = 2$ achamos, portanto, $d = \sqrt{2}$. A razão entre a diagonal e o lado de um quadrado, portanto, é a raiz quadrada de 2. (Uma calculadora de bolso pode mostrar que o valor dele é igual a 1,41421356...) O que queremos mostrar agora é que $\sqrt{2}$ não pode ser expressa como razão entre dois números inteiros, quaisquer que sejam eles (e, portanto, é um número irracional). Pense a respeito disso por um momento: o que estamos prestes a provar é que, embora tenhamos uma coleção infinita de números inteiros à nossa disposição, por mais que procuremos, nunca encontraremos dois deles cuja razão seja exatamente igual a $\sqrt{2}$. Isto não é surpreendente?

A prova (por absurdo) é assim: começamos supondo o oposto do que queremos provar, ou seja, supomos que $\sqrt{2}$ é, na verdade, igual a alguma razão entre dois números inteiros a e b, $\sqrt{2} = a/b$. Se por acaso a e b têm alguns fatores em comum (como 9 e 6 têm 3 como fator comum), então simplificaremos a fração dividindo ambos os números pelos fatores comuns até chegarmos a dois números, p e q, que não têm fatores em comum. (No exemplo acima, isso transformaria $^9/_6$ em $^3/_2$.) Evidentemente, p e q não podem ser pares. (Se fossem, conteriam o fator comum 2.) Nossa hipótese é que $p/q = \sqrt{2}$, onde p e q são números inteiros que não têm fatores em comum. Podemos elevar ao quadrado os dois lados da equação e obter: $p^2/q^2 = 2$. Agora multiplicamos os dois lados por q^2 e obtemos $p^2 = 2q^2$. Note que o lado direito dessa equação é um número par, pois é um certo número (q^2) multiplicado por 2, o que sempre dá um número par. Como p^2 é igual a esse número par, p^2 é um número par. Mas se o quadrado de um número é par, então o próprio número tem de ser par. (O quadrado é simplesmente o número multiplicado por ele mesmo, e se esse número fosse ímpar, sua multiplicação por ele mesmo também seria ímpar.) Concluímos, portanto, que p tem de ser um número par. Lembre que isto significa que q deve ser ímpar, pois p e q não tinham fatores em comum. Mas se p é par, então podemos escrever p na forma $p = 2r$ (já que qualquer número par tem 2 como fator). A equação anterior pode, portanto, ser escrita (simplesmente substi-

tuindo p por $2r$) como $(2r)^2 = 2q^2$, ou $4r^2 = 2q^2$ [pois $(2r)^2 = (2r) \times (2r)$]. Dividindo ambos os lados por 2 dá $2r^2 = q^2$. Pelos mesmos argumentos usados anteriormente, isso quer dizer que q^2 é par (já que é 2 vezes algum número) e que, portanto, q tem que *ser par*. Mas note que, acima, nós tínhamos mostrado que q tinha que ser ímpar! Assim, chegamos a algo que é evidentemente uma contradição lógica, pois mostramos que q tem que ser par e ímpar ao mesmo tempo. Isso demonstra que nossa hipótese inicial, de que existem dois números inteiros p e q cuja razão é $\sqrt{2}$ é falsa, completando assim a prova. Números como $\sqrt{2}$ representam um novo tipo de número — os números *irracionais*.

Pode-se mostrar de modo bastante semelhante que a raiz quadrada de qualquer número que não seja um quadrado perfeito (como 9 ou 16) é um número irracional. Números como $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ são irracionais.

A magnitude da descoberta da incomensurabilidade e dos números irracionais não pode ser subestimada. Antes dessa descoberta, os matemáticos supunham que, se há dois segmentos de linha, um dos quais é maior do que o outro, então sempre se poderia achar uma unidade menor de medida tal que os comprimentos de ambos os segmentos fossem múltiplos exatos dessa medida menor. Por exemplo, se um segmento tivesse exatamente 21,37 centímetros e o outro tivesse 11,475 centímetros, então poderíamos medir ambos em unidades de milésimos de centímetro, e o primeiro teria 21.370 dessas unidades enquanto o segundo teria 11.475. Portanto, os antigos estudiosos acreditavam que achar tal medida comum menor era meramente uma questão de procura paciente. A descoberta da incomensurabilidade significa que, para os dois segmentos de uma linha cortados na Razão Áurea (como AC e BC na Figura 2), para a diagonal e o lado de um quadrado, ou para a diagonal e o lado do pentagrama, nunca será encontrada uma medida comum. Steven Cushing publicou um poema em 1988 (na *Mathematics Magazine*) que descreve nossa reação natural aos irracionais:

Pitágoras
Nos confundiu
E nossa razão ficou sobrecarregada
Com número irracional.

Podemos apreciar melhor o salto intelectual que foi necessário para a descoberta dos números irracionais percebendo que mesmo frações ou *números racionais* como $1/2$, $3/5$, $11/13$, representam por si mesmos uma descoberta (ou invenção) humana extremamente importante. O matemático Leopold Kronecker, do século XIX (1823-1891), manifestou sua opinião sobre este assunto dizendo: "Deus criou os números naturais, todo o resto é obra do homem."

Muito do que conhecemos a respeito da familiaridade dos antigos egípcios com frações, por exemplo, vem do Papiro Rhind (ou Ahmes). É um imenso papiro (cerca de 5,5 metros de comprimento por 30 centímetros de altura) que foi copiado por volta de 1650 a.C. de documentos mais antigos por um escriba chamado Ahmes. O papiro foi encontrado em Tebas e comprado em 1858 pelo colecionador de antiguidades escocês Henry Rhind, e está atualmente no British Museum (exceto por alguns fragmentos, que apareceram inesperadamente em uma coleção de papéis médicos, e que estão atualmente no Brooklyn Museum). O Papiro Rhind, que é, na verdade, um manual de calculador, tinha nomes simples apenas para frações da unidade, como $1/2$, $1/3$, $1/4$ etc., e para $2/3$. Alguns outros papiros tinham também um nome para $3/4$. Os antigos egípcios geravam outras frações simplesmente adicionando algumas frações de unidade. Por exemplo, eles tinham $1/2 + 1/5 + 1/10$ para representar $4/5$ e $1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232$ para representar $2/29$. Para medir frações de um volume de grãos chamado hekat, os antigos egípcios usavam o que na época era conhecido como frações do "olho de Horus". Segundo a lenda, numa luta entre o deus Horus, o filho de Osíris e Ísis, e o assassino de seu pai, um olho de Horus foi arrancado e despedaçado. O deus da escrita e dos cálculos, Thoth, encontrou mais tarde os pedaços e quis restaurar o olho. Mas ele só achou os pedaços que correspondiam

às frações $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$, $1/32$ e $1/64$. Percebendo que essas frações só somavam $63/64$, Thoth produziu a fração que faltava, $1/64$, por mágica, o que lhe permitiu completar o olho.

Estranhamente, o sistema egípcio de frações da unidade continuou a ser usado na Europa por muitos séculos. Durante o Renascimento, para aqueles, que tinham problemas para aprender como somar ou subtrair frações, alguns escritores de livros escolares de matemática forneciam regras escritas em versos. Thomas Hylles nos dá um exemplo divertido no seu livro *A arte da aritmética vulgar, em inteiros e em frações* (publicado em 1600):

Para adição de frações ou então subtração
Todos na mesma base devemos pôr antes
O que fazemos com perfeição usando redução
E como devemos fazer sempre com semelhantes,
Somamos ou subtraímos os de cima nada mais,
Não mexendo nas bases que já fizéramos iguais

Apesar, ou talvez (em certa medida) por causa, do segredo que cercava Pitágoras e a Irmandade Pitagórica, tenta-se atribuir a eles o crédito por algumas notáveis descobertas matemáticas que podem incluir a Razão Áurea e a incomensurabilidade. Mas devido ao enorme prestígio e ao sucesso da antiga matemática babilônica e egípcia, e ao fato de que o próprio Pitágoras provavelmente aprendeu um pouco de matemática no Egito e na Babilônia, podemos perguntar: é possível que essas civilizações ou outras tenham descoberto a Razão Áurea antes dos pitagóricos? Essa questão se torna particularmente intrigante quando percebemos que a literatura está cheia de afirmações de que a Razão Áurea pode ser encontrada nas dimensões da Grande Pirâmide de Khufu, em Gisé. Para responder a essa pergunta, teremos que montar uma expedição exploratória de matemática arqueológica.

3

SOB UMA PIRÂMIDE QUE APONTA PARA A ESTRELA Y?

As Pirâmides colocadas no Egito, em primeiro
Depois os Jardins da Babilônia, para Amytis feitos,
Terceiro, o túmulo de Mausolo, de culpa e afeição;
Em Éfeso construído, o Templo de Diana segue então.
O Colosso de Rhodes, para o Sol em bronze fundido;
A Estátua de Júpiter é o sexto, por Fídias construído;
Os Faróis do Egito, dizem, chegam em derradeiro,
Ou o Palácio de Ciro, cimentado com ouro verdadeiro.

— ANÔNIMO, "AS SETE MARAVILHAS DA ANTIGUIDADE"

O título deste capítulo vem do poema *Sobre Shakespeare*, escrito em 1630 pelo famoso poeta inglês John Milton (1608-1674). Milton, ele próprio bastante valorizado como um poeta só superado por Shakespeare, escreve:

O que precisa meu Shakespeare para seus ossos honrados
O trabalho de uma era em pedras empilhadas?
Ou que suas relíquias consagradas devam ser escondidas
Sob uma pirâmide que aponta para a estrela y?
Caro filho da memória, grande herdeiro da fama,
O que precisas de tal testemunha fraca de teu nome?

Como veremos logo, o alinhamento das pirâmides realmente se baseou nas estrelas. Porém, como se esses monumentos não inspirassem reverência suficiente, muitos autores insistiram em que as dimensões da Grande Pirâmide foram derivadas da Razão Áurea. Para todos os entusiastas da Razão Áurea, esta associação apenas se soma ao clima místico que cerca essa proporção. Mas será que isso é verdade? Os antigos egípcios realmente conheciam Φ, e se conheciam, será que eles realmente decidiram "imortalizar" a Razão Áurea incorporando-a a uma das Sete Maravilhas do Mundo Antigo?

Observando que o interesse inicial pela Razão Áurea provavelmente foi inspirado por sua relação com o pentagrama, devemos primeiro acompanhar um pouco do começo da história do pentagrama, pois isso pode nos levar às ocorrências mais antigas da Razão Áurea.

Peça a qualquer criança para desenhar uma estrela, e ela provavelmente vai desenhar um pentagrama. Isso é conseqüência do fato de que vemos as estrelas através da atmosfera da Terra. A turbulência do ar distorce a luz das estrelas em padrões que mudam constantemente, causando assim a familiar cintilação. Na tentativa de representar as pontas geradas pela cintilação usando uma forma geométrica simples, os homens chegaram ao pentagrama, que também tem a atraente propriedade adicional de poder ser desenhado sem que se levante o instrumento de escrita da argila, do papiro ou do papel.

Com o passar do tempo, essas "estrelas" se tornaram símbolos de excelência (por exemplo, hotéis, filmes e críticas de livro cinco estrelas), realização ("estrelato"), oportunidade ("alcançou as estrelas") e autoridade (general "cinco estrelas"). Quando esse simbolismo é combinado com o apelo romântico de uma noite estrelada, não surpreende que as bandeiras de mais de sessenta nações representem estrelas de cinco pontas e que esses padrões de estrelas apareçam em inúmeros logotipos comerciais (por exemplo, Texaco e Chrysler).

Alguns dos mais antigos pentagramas conhecidos vêm da Mesopotâmia, do quarto milênio a.C. Formas de pentagrama foram encontradas em escavações em Uruk (onde também foram descobertas as escritas mais antigas) e em Jemdet Nasr. A antiga cidade suméria de Uruk provavelmente tam-

bém é aquela mencionada na Bíblia (Gênesis 10) como Erech, uma das cidades do reino do poderoso caçador Nimrod. O pentagrama foi encontrado em uma tabuleta de argila que data aproximadamente, de 3200 a.C. Em Jemdet Nasr, pentagramas mais ou menos do mesmo período foram encontrados em um vaso e em uma rosca de girar. Em sumério, o pentagrama, ou o seu derivado cuneiforme, significava "as regiões do universo". Outras regiões do antigo Oriente Médio também produziram pentagramas. Um pentagrama em um raspador de pedra do período Calcolítico (4500-3100 a.C.) foi encontrado em Tel Esdar no Deserto do Negev, em Israel. Pentagramas também foram encontrados em Israel em escavações em Gezer e em Tel Zacaria, mas esses datam de um período bem posterior (século V a.C.). Apesar do fato de as estrelas de cinco pontas aparecerem com bastante freqüência em artefatos egípcios antigos, pentagramas verdadeiramente geométricos não são muito comuns, embora um pentagrama datando de aproximadamente 3100 a.C. tenha sido encontrado em uma jarra em Naqadá, perto de Tebas. Geralmente, o símbolo hieroglífico de uma estrela inscrita num círculo significava o "submundo", ou a morada mítica das estrelas no crepúsculo, embora estrelas sem círculos servissem simplesmente para significar as estrelas noturnas.

Contudo, a pergunta principal que precisamos responder no contexto deste livro não é se pentagramas ou pentágonos tinham algum significado simbólico ou místico para essas civilizações antigas, mas se essas civilizações também estavam cientes das propriedades *geométricas* dessas figuras e, em particular, da Razão Áurea.

ANTES DE BABILÔNIA ERA PÓ

Estudos de tabuletas cuneiformes que datam do segundo milênio a.C. que foram descobertas em 1936 em Susa, no Irã, deixam pouca dúvida de que os babilônios da primeira dinastia sabiam pelo menos uma fórmula aproximada da área de um pentágono. O interesse babilônico por esta figura pode

ter se originado do simples fato de que ela era obtida quando as pontas de todos os cinco dedos eram pressionados sobre uma placa de argila. Lê-se numa linha numa tabuleta de Susa: "1 40, a constante da figura de cinco lados." Como os babilônios usavam o sistema sexagesimal (base 60), os números 1 40 devem ser interpretados como 1 + $^{40}/_{60}$, ou 1,666..., para a área de um pentágono. A verdadeira área do pentágono de lado unitário não está, de fato, muito distante desse valor — 1,720. Os babilônios tinham uma aproximação similar para Pi, a razão entre a circunferência de um círculo e o seu diâmetro. Na verdade, a aproximação para Pi e para a área do pentágono se baseava na mesma relação. Os babilônios supunham que o perímetro de qualquer polígono regular (figura de lados e ângulos idênticos) era igual a seis vezes o raio do círculo que circunscrevia esse polígono (Figura 12). Essa relação é realmente precisa para um hexágono regular (forma de seis lados; Figura 12), pois todos os triângulos têm lados iguais. O valor de π deduzido pelos babilônios era $\pi = 3\,^{1}/_{8} = 3{,}125$. Esta não é, de fato, uma aproximação ruim, já que o valor exato é 3,14159... Para o pentágono, a suposição "perímetro igual a seis vezes o raio" (que não é exata) dá o valor aproximado de 1,666... para a área que aparece na tabuleta de Susa.

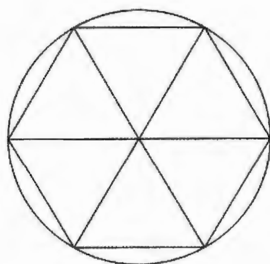


Figura 12

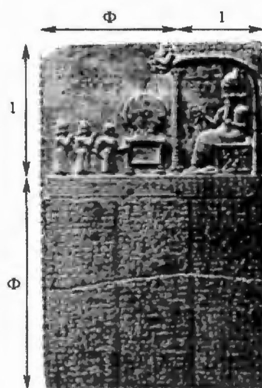


Figura 13

Apesar dessas importantes descobertas matemáticas antigas e da íntima relação entre o sistema pentágono-pentagrama e a Razão Áurea, não existe absolutamente qualquer evidência matemática de que os babilônios conhecessem a Razão Áurea. Ainda assim, alguns textos afirmam que a Razão Áurea era encontrada em estelas e baixos-relevos babilônicos e assírios. Por exemplo, no divertido livro de Michael Schneider, *Um guia destinado a iniciantes para construir o universo*, diz-se que uma estela babilônica (Figura 13) que mostra um sacerdote conduzindo um iniciado para um "encontro" com o deus Sol contém "muitas relações de Razão Áurea". Do mesmo modo, num artigo publicado em 1976 no periódico *The Fibonacci Quarterly*, a analista de arte Helene Hedian afirma que um baixo-relevo de um semideus alado assírio do século IX a.C. (atualmente no Metropolitan Museum of Art) se encaixa perfeitamente num retângulo com dimensões relacionadas pela Razão Áurea. Além disso, Hedian sugere que as linhas fortes das asas, das pernas e do bico seguem outras divisões de Fi. Hedian também faz afirmações semelhantes sobre as tábuas babilônicas "Leoas Morrendo" de Nínive, que datam, aproximadamente, de 600 a.C., e estão hoje no British Museum, em Londres.

Será que a Razão Áurea realmente aparece nesses artefatos mesopotâmicos ou isso é simplesmente um equívoco?

Para responder a essa pergunta, devemos, de alguma maneira, identificar critérios que nos permitirão determinar se certas afirmações sobre o aparecimento da Razão Áurea são verdadeiras ou falsas. É evidente que a presença da Razão Áurea pode ser estabelecida de modo inequívoco se alguma forma de documentação indicar que artistas ou arquitetos a usaram conscientemente. Mas, infelizmente, não existe qualquer documentação desse tipo a respeito das tábuas de argila e dos baixos-relevos babilônicos.

Um dedicado numerista áureo ainda poderia argumentar, obviamente, que a ausência de evidência não é evidência de ausência, e que as dimensões medidas por ele fornecem, por si mesmas, prova suficiente do emprego da Razão Áurea. Como veremos em breve, porém, o jogo de se tentar encontrar a Razão Áurea nas dimensões dos objetos é enganoso. Vou ilustrar isso

com um exemplo simples. A Figura 14 mostra um esboço de uma pequena televisão que fica sobre o balcão de minha cozinha. O desenho mostra as dimensões que medi sozinho. Você pode notar que a razão entre a altura da saliência na parte traseira da televisão e sua largura, $^{10,6}/_{6,5} = 1,63$, e a razão entre o comprimento da frente e a altura da tela, $^{14}/_{8,75} = 1,6$, estão razoavelmente próximos do valor da Razão Áurea, 1,618... Será que isto significa que os fabricantes desse televisor decidiram incluir a Razão Áurea em sua arquitetura? Evidentemente, não. Este exemplo simplesmente demonstra os dois principais pontos fracos acerca da presença da Razão Áurea na arquitetura ou em obras de arte com base somente nas dimensões: (1) eles envolvem malabarismos numéricos, e (2) eles ignoram as inexatidões nas mensurações.

Quando você mede as dimensões de uma estrutura relativamente complicada (por exemplo, uma figura numa estela ou um aparelho de televisão), você terá à sua disposição uma série inteira de comprimentos da qual se pode escolher. Desde que você possa ignorar convenientemente partes do objeto que está sendo examinado, se tiver paciência para manipular e fazer truques com os números de várias maneiras, você acabará encontrando alguns números interessantes. Assim, fui capaz de "descobrir" na televisão algumas dimensões que dão razões que são próximas da Razão Áurea.

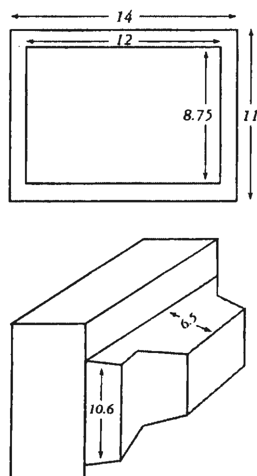


Figura 14

O segundo ponto que quase sempre é ignorado pelos aficionados pela Razão Áurea excessivamente arrebatados é que qualquer medição de comprimentos envolve erros e imprecisões. É importante perceber que qualquer imprecisão na mensuração de comprimentos resulta numa imprecisão ainda maior na razão calculada. Por exemplo, imagine que dois comprimentos, de 10 centímetros cada, são medidos com precisão de 1%. Isto significa que o resultado da medida para cada comprimento pode ser

qualquer coisa entre 9,9 e 10,1 centímetros. A razão entre esses comprimentos pode ser tão ruim quanto $^{9,9}/_{10,1}$ = 0,98, que representa uma inexatidão de 2% — o dobro daquela das medidas individuais. Portanto, um numerista áureo superzeloso poderia mudar duas medidas somente em 1%, e assim afetar a razão obtida em 2%.

Um reexame da Figura 13 com essas advertências em mente revela, por exemplo, que o longo segmento vertical foi convenientemente escolhido de modo a incluir a base do baixo-relevo, e não apenas o texto cuneiforme. Do mesmo modo, o ponto até onde o longo segmento horizontal foi medido foi escolhido arbitrariamente para ficar à direita, e não à esquerda, do canto do baixo-relevo.

Reavaliando todo o material existente deste ponto de vista, tenho de concluir que é bastante improvável que os babilônios tivessem descoberto a Razão Áurea.

MUITO LONGE NA TERRA EGÍPCIA

No caso do antigo Egito, a situação é mais complicada, e exige um grande trabalho de detetive. Aqui nos deparamos com o que parece ser uma evidência esmagadora, na forma de numerosos textos que afirmam que Fi pode ser encontrado, por exemplo, nas proporções da Grande Pirâmide e em outros monumentos egípcios antigos.

Vou começar com dois dos casos mais fáceis, os de Osírion e do túmulo de Petosíris. O Osírion é um templo considerado o memorial do rei Seti I, que governou o Egito na 19ª dinastia, aproximadamente de 1300 a 1290 a.C. O templo foi descoberto pelo notável arqueólogo *sir* Flinders Petrie em 1901, e o árduo trabalho de escavação foi concluído em 1927. Supõe-se que o próprio templo represente, por meio de seu simbolismo arquitetônico, o mito de Osíris. Osíris, o marido de Ísis, foi inicialmente o rei do Egito. Seu irmão Seth o assassinou e espalhou os pedaços de seu corpo. Ísis recolheu os pedaços, dando, assim, uma nova vida a Osíris. Conseqüentemen-

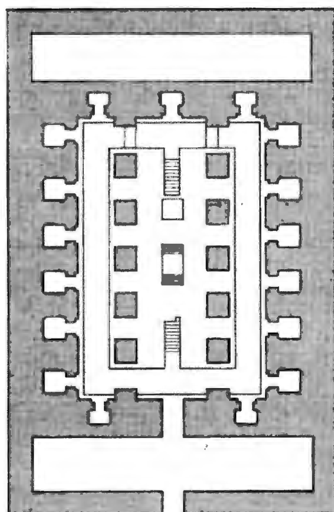


Figura 15a

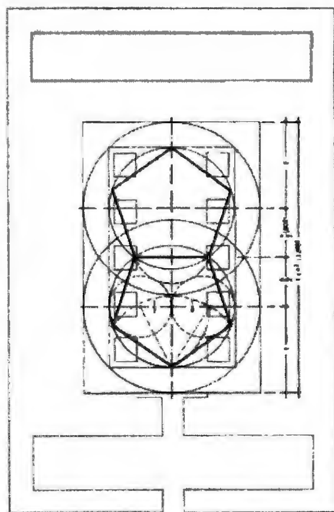


Figura 15b

te, Osíris se tornou rei do Submundo e da transformação cíclica através da morte e do renascimento, nos níveis individual e cósmico. Depois que o culto ao morto se desenvolveu mais durante o Reino Médio (2000-1786 a.C.), Osíris foi considerado o juiz da alma após a morte.

O templo com telhado de Osírion era inteiramente coberto de terra, de modo a parecer um túmulo subterrâneo. O plano do Osírion (Figura 15a) contém uma área central com dez colunas quadradas, que são cercadas pelo que provavelmente foi um fosso cheio de água. Essa estrutura foi interpretada como um símbolo da criação a partir das águas primordiais.

Em seu interessante livro, *Geometria sagrada: filosofia e prática*, de 1982, Robert Lawlor sugere que a geometria do Osírion está "de acordo com as proporções da Seção Áurea" porque a "Proporção Áurea é a 'idéia-forma' transcendente que precisa existir *a priori* e eternamente, antes de todas as progressões que evoluem no tempo e no espaço." Para dar suporte à sua sugestão sobre o proeminente aparecimento da Razão Áurea, Φ, no projeto arquitetônico do templo, Lawlor apresenta análises geométricas detalhadas do tipo mostrado na Figura 15b. Além do mais, ele afirma que "a ênfase no

tema do pentágono simbolizava claramente a crença de que o rei, após a morte, transformou-se numa estrela".

Apesar do seu considerável apelo visual, não acho as análises de Lawlor convincentes. Não só as linhas que supostamente indicariam as proporções da Razão Áurea estão desenhadas em pontos que parecem ser totalmente arbitrários, como os pentágonos representam, na minha opinião, uma interpretação bastante forçada de algo que é, na verdade, um formato retangular. O fato de o próprio Lawlor apresentar outras análises *geométricas* do formato do templo (com Φ sendo associado a diferentes dimensões) agrava a natureza parcial e um tanto caprichosa dessas interpretações.



Figura 16a

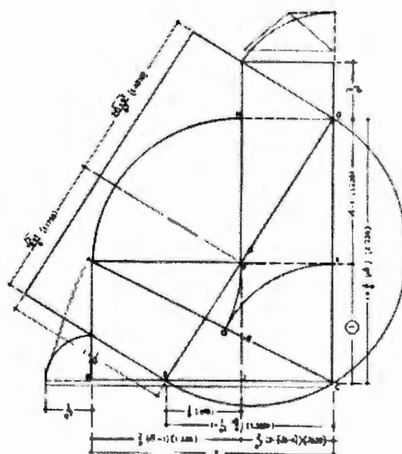


Figura 16b

A situação do túmulo de Petosíris, que foi escavado pelo arqueólogo Gustave Lefebvre no início dos anos 1920, é bastante semelhante. O túmulo não é tão antigo quanto o Osírion, datando de 300 a.C., aproximadamente, e foi construído para o Sumo Sacerdote (conhecido como o Mestre do Assento) de Thoth. Como essa sepultura é de um período durante o qual a Razão Áurea já era conhecida (pelos gregos), pelo menos em princípio esta poderia aparecer na geometria do túmulo. De fato, Lawlor (de novo em *Geometria sagrada*) conclui que "o Mestre Petosíris tinha um conhecimento

completo e extremamente sofisticado da Proporção Áurea". Esta conclusão se baseou em duas análises geométricas de um baixo-relevo pintado no muro a leste da capela do túmulo (Figura 16a). O baixo-relevo mostra um sacerdote fazendo uma libação sobre a cabeça da múmia do morto.

Infelizmente, a análise geométrica que Lawlor apresenta parece bastante forçada (Figura 16b), com linhas desenhadas convenientemente em pontos que não são terminais óbvios. Além disso, algumas das razões obtidas são complicadas demais (por exemplo, $2\sqrt{1+\Phi^2}/\Phi^2$ para serem críveis. Minha impressão, portanto, é que, embora a afirmação de Lawlor de que "as práticas funerárias na tradição faraônica eram realizadas não só para oferecer um receptáculo para o corpo físico do falecido, mas também para construir um lugar onde seria retido o conhecimento metafísico que a pessoa tivesse dominado durante sua vida" seja bastante correta, a Razão Áurea provavelmente não fazia parte dos conhecimentos de Petosíris.

Devo enfatizar que é praticamente impossível provar que a Razão Áurea não apareça em alguns artefatos egípcio quando a evidência é apresentada somente na forma de algumas dimensões medidas. Contudo, na falta de qualquer documentação que sustente essa idéia, para mantê-la, seria necessário que as dimensões da obra de arte ou do projeto arquitetônico fossem tais que a Razão Áurea saltasse aos olhos, em vez de estar enterrada tão profundamente a ponto de exigir uma análise bastante complexa para ser revelada. Como veremos depois, investigações detalhadas de muitos dos casos mais recentes, a respeito dos quais existiam afirmações na literatura de que os artistas usaram a Razão Áurea, mostram que não havia base para essas asserções.

Ao invés de continuar com esses assuntos relativamente obscuros, como a estela egípcia de aproximadamente 2150 a.C. a respeito da qual se afirmou que exibia dimensões em uma razão Φ, vou passar agora ao caso mais importante — a Grande Pirâmide de Khufu.

PIRÂMIDE DE NÚMEROS

Segundo a tradição, foi o rei Menes (ou Narmer) que, como governante do Alto Egito, conquistou o reino rival do Baixo Egito (no delta do Nilo), unificando assim o Egito num único reino, por volta de 3110 a.C. O culto ao Sol como forma básica de religião foi introduzido durante o governo da terceira dinastia (c. 2780-2680 a.C.), assim como a mumificação e a construção de grandes monumentos de pedra. A era das grandes pirâmides chegou ao seu auge durante a quarta dinastia, por volta de 2500 a.C., na famosa tríade de pirâmides de Gisé (Figura 17). A "Grande Pirâmide" (a que está atrás na figura) representa não só um monumento ao rei, mas também um testemunho do sucesso da organização unificada da antiga sociedade egípcia. O pesquisador Kurt Mendelssohn concluiu no seu livro *O enigma das pirâmides* (1974) que, no fim das contas, o objetivo de todo o exercício de construção das pirâmides não era fazer uso do produto final (como túmulos), mas a sua construção. Em outras palavras, o importante não eram as próprias pirâmides, mas a sua *construção*. Isto explicaria a aparente disparidade



Figura 17

entre o tremendo esforço de empilhar cerca de 20 milhões de toneladas de pedra calcária extraída e lavrada e o objetivo exclusivo de enterrar debaixo delas três faraós.

Em 1996, o egiptólogo amador Stuart Kirkland Wier, que trabalhava com o patrocínio do Museu de História Natural de Denver, calculou que a construção da Grande Pirâmide de Gisé exigiu cerca de 10 mil trabalhadores. Um cálculo da energia que foi necessária para se carregar os blocos de pedra da pedreira até o local da pirâmide, bem como de energia exigida para se levantar as pedras até a altura necessária, deu a Wier a quantidade total de trabalho que precisou ser utilizado. Supondo que a construção tenha demorado vinte e três anos (a duração do reinado de Khufu), e fazendo algumas estimativas razoáveis acerca da energia diária de um trabalhador egípcio e o cronograma da construção, Wier foi capaz de estimar o tamanho da força de trabalho.

Até recentemente, a datação das pirâmides de Gisé se baseava principalmente em listas que chegaram até nós enumerando reis e a duração de seus reinados. Como essas listas são raras, geralmente incompletas e reconhecidamente incoerentes em alguns pontos, as cronologias tinham imprecisões de até cem anos. (A datação por meio de carbono radioativo tem uma imprecisão semelhante.) Em um artigo publicado na revista *Nature* em novembro de 2000, Kate Spence, da Universidade de Cambridge, propôs outro método de datação, que dá à Grande Pirâmide de Khufu a data de 2480 a.C, com uma imprecisão de apenas cinco anos, aproximadamente. O método de Spence foi inicialmente sugerido pelo astrônomo *sir* John Herschel em meados do século XIX, e é baseado no fato de as pirâmides serem sempre voltadas para o Norte com extraordinária precisão. Por exemplo, a direção da Grande Pirâmide em Gisé se desvia do Norte exato por menos de três minutos de arco (apenas 5% de um grau). Não há dúvida de que os egípcios usavam observações astronômicas para determinar a direção norte com tanta precisão.

O pólo norte celestial é definido como um ponto no céu alinhado com o eixo de rotação da Terra, em volta do qual as estrelas parecem girar. No

entanto, o próprio eixo da Terra não é precisamente fixo; em vez disso, ele oscila muito lentamente, como o eixo de um pião ou um giroscópio. Em conseqüência desse movimento, conhecido como precessão, o pólo norte celestial parece traçar um grande círculo no céu setentrional a cada 26 mil anos. Embora hoje o pólo norte celestial seja marcado (no raio de um grau) pela Estrela Norte, Polar (conhecida pelo nome astronômico de α-Ursa Menor), não era assim na época da construção das Grandes Pirâmides. Identificando experimentalmente as duas estrelas que os antigos egípcios usaram para marcar o Norte como sendo a ζ-Ursa Maior e a β-Ursa Menor, e por meio de um cuidadoso exame dos alinhamentos de oito pirâmides, Spence foi capaz de determinar a data da construção da pirâmide de Khufu como sendo 2480 a.C. ± 5, cerca de setenta e quatro anos antes da data de estimativas anteriores.

Poucas estruturas arqueológicas deram origem a tantos mitos e controvérsias quanto a Grande Pirâmide. A preocupação com as pirâmides, ou o lado oculto da piramidologia, foi, por exemplo, um tema fundamental para o culto dos membros da ordem Rosa-Cruz (fundada em 1459 por Christian Rosenkreuz). Os membros deste culto tinham grandes pretensões de conhecer os segredos da natureza, sinais mágicos e coisas assim. A Maçonaria se originou de algumas facções do culto Rosa-Cruz.

O interesse mais recente em piramidologia começou provavelmente com o livro permeado de religiosidade do editor aposentado inglês John Taylor, *A grande pirâmide: Por que foi construída e quem a construiu?*, publicado em 1859. Taylor tinha tanta convicção de que as pirâmides continham várias dimensões inspiradas por verdades matemáticas desconhecidas dos antigos egípcios que concluiu que sua construção era conseqüência de intervenção divina. Influenciado pela idéia em moda na época de que os britânicos eram os descendentes das tribos perdidas de Israel, ele sugeriu, por exemplo, que a medida básica de unidade da pirâmide era a mesma do cúbito bíblico (cerca de 50 centímetros; pouco mais de 25 polegadas britânicas; exatamente 25 polegadas "piramidais"). Essa unidade foi supostamente utilizada também por Noé na construção da Arca e pelo rei Salomão na construção do Tem-

plo. Taylor afirmou ainda que esse cúbito sagrado resultou de uma relação divina feita com base no comprimento do raio do centro para o pólo da Terra, com a "polegada piramidal" sendo quinhentos milionésimos do eixo polar terrestre. Esse livro excêntrico encontrou um grande admirador em Charles Piazzi Smyth, o astrônomo real da Escócia, que publicou, por volta de 1860, nada menos do que três grossos volumes (o primeiro intitulado *Nossa herança na grande pirâmide*) sobre a Grande Pirâmide. O entusiasmo de Piazzi Smyth foi motivado em parte pela sua forte objeção às tentativas de se introduzir o sistema métrico na Inglaterra. Sua lógica pseudocientífica/teológica funcionava mais ou menos assim: A Grande Pirâmide foi projetada em polegadas; as propriedades matemáticas da pirâmide mostram que ela foi construída por inspiração divina; portanto, a polegada é uma unidade dada por Deus, diferentemente do centímetro, que era inspirado "pela revolução mais selvagem, mais sangrenta e mais ateísta" (significando a Revolução Francesa). Em outras explicções sobre seu ponto de vista a respeito do sistema de medidas em debate, Piazzi Smyth escreve (em *A grande pirâmide, seus segredos e mistérios revelados*):

> De modo que não pela força da fraca oratória emitida em defesa da metrologia britânica diante do Parlamento, onde os projetos de lei dos agitadores que defendem o sistema métrico francês eram freqüentemente rechaçados, mas pelos pecados do próprio sistema de grandes saltos, e para evitar que uma nação escolhida, uma nação preservada através da história... para evitar que essa nação descuidadamente se roube na coisa amaldiçoada, no próprio vestuário do Anti-Cristo que chega, e como Esaú, por um pouco de sopa rala, por um pouco de lucro mercantil extratemporário, jogar fora uma instituição de direito nato que a nossa raça abraâmica foi destinada a guardar até a realização do mistério de Deus tocando toda a humanidade.

Depois de ler este texto, não podemos nos surpreender ao ver que o título escolhido pelo escritor Leonard Cottrell para um capítulo sobre Charles Piazzi Smyth no seu livro *As montanhas do faraó* é "O Grande Piramidiota."

Piazzi Smyth e Taylor essencialmente reviveram a obsessão pitagórica pelo número 5 em sua análise da pirâmide baseada na numerologia. Eles notaram que a pirâmide tinha, obviamente, cinco cantos e cinco faces (contando a base); que o "cúbito sagrado" tinha cerca de 25 (5 ao quadrado) polegadas (ou exatamente 25 "polegadas piramidais"); que a "polegada piramidal" corresponde a 500 milionésimos do eixo da Terra, e assim por diante.

O escritor Martin Gardner encontrou um exemplo divertido que demonstra o absurdo da análise da "essência de cinco" (*fiveness*) de Piazzi Smyth. No seu livro *Modismos e falácias em nome da ciência*, Gardner escreve:

> Se procurarmos os fatos a respeito do Monumento de Washington no *Almanaque mundial*, encontraremos considerável essência de cinco. Sua altura é de 555 pés e 5 polegadas. Sua base tem 55 pés quadrados e as janelas estão colocadas a 500 pés da base. Se a base é multiplicada por 60 (ou cinco vezes o número de meses em um ano), isso dá 3.300, que é o peso exato da cimalha em libras. Além disso, a palavra "Washington" tem exatamente dez letras (duas vezes cinco). E se o peso da cimalha for multiplicado pela base, o resultado é 181.500 — um número bem próximo da velocidade da luz em milhas por segundo.

Aqui, no entanto, chega o anúncio mais dramático com relação à Grande Pirâmide no contexto do nosso interesse na Razão Áurea. No mesmo livro, Gardner se refere a sua afirmação que, se for verdadeira, mostra que a Razão Áurea foi realmente incorporada ao desenho da Grande Pirâmide. Gardner escreve: "Heródoto afirma que a Pirâmide foi construída de forma que a área de cada face fosse igual à área de um quadrado cujo lado fosse igual à altura da Pirâmide". O historiador grego Heródoto (c. 485-425 a.C.) foi chamado de "O Pai da História" pelo grande orador romano Cícero (106-43 a.C.). Embora Gardner não tenha percebido todas as implicações da afirmação de Heródoto, ele não foi o primeiro nem o último a apresentá-la.

Em um artigo intitulado "O Padrão de Comprimento Modular Britânico", publicado em *The Athenaeum* em 28 de abril de 1860, o famoso astrônomo britânico *sir* John (Frederick William) Herschel (1792-1871) escreve:

> A mesma inclinação... pertence a uma pirâmide caracterizada pela propriedade de ter cada uma de suas faces igual ao quadrado descrito sobre sua altura. Esta é a relação característica que, nos diz Heródoto, seus construtores queriam que fosse incorporada, e que nós hoje sabemos que realmente incorporaram.

Mais recentemente, em 1999, o escritor e especialista em telecomunicações francês Midhat J. Gazalé escreveu no seu interessante livro *Gnomo: Dos faraós aos fractais*: "Disseram que o historiador grego Heródoto aprendeu com os sacerdotes egípcios que o quadrado da altura da Grande Pirâmide é igual à área da sua face lateral triangular." Por que esta afirmação é tão crucial? Pela simples razão de que é equivalente a dizer que a Grande Pirâmide foi projetada de tal maneira que a razão entre a altura de sua face triangular e metade do lado da base fosse igual à Razão Áurea!

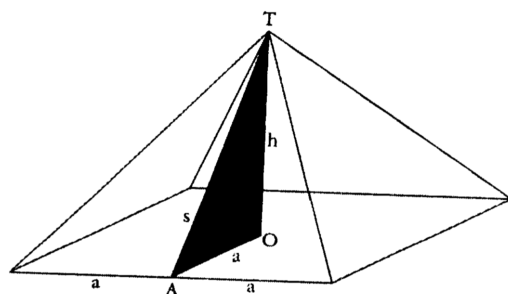


Figura 18

Examine por um momento o esboço da pirâmide na Figura 18, no qual *a* é metade do lado da base, *s* é a altura da face triangular e *h* é a altura da

pirâmide. Se a afirmação atribuída a Heródoto é correta, isto significaria que h^2 (o quadrado da altura da pirâmide) é igual a $s \times a$ (a área da face triangular; veja o Apêndice 3). Um pouco de geometria elementar mostra que essa igualdade significa que a razão s/a é exatamente igual à Razão Áurea. (A prova é dada no Apêndice 3.) A pergunta imediata que vem à mente é: bem, será verdade? A base da Grande Pirâmide não é de fato um quadrado perfeito, já que os comprimentos dos lados variam de 755,43 pés a 756,08 pés. A média dos comprimentos é $2a$ = 755,79 pés. A altura da pirâmide é h = 481,4 pés. Desses valores, descobrimos (usando o Teorema de Pitágoras) que a altura s do lado triangular é igual a 612,01 pés. Assim, temos que s/a = 612,01/377,90 = 1,62, que é extremamente próximo (diferença de menos de 0,1%) da Razão Áurea.

Portanto, essa evidência, aparentemente, significaria que os antigos egípcios realmente conheciam a Razão Áurea, pois não só esse número aparece na razão das dimensões da Grande Pirâmide, como sua presença parece ter suporte na documentação histórica das intenções de seus projetistas, na forma da afirmação de Heródoto. Mas será que isto é verdade? Ou será que estamos presenciando aqui o que o matemático e escritor canadense Roger Herz-Fischler chamou de "uma das mais engenhosas prestidigitações da história 'científica'"?

Obviamente, como as medições das dimensões não podem ser alteradas, a única parte dessa "evidência" da presença da Razão Áurea que pode ser questionada é a afirmação de Heródoto. Apesar das numerosas repetições da citação de *História*, e embora não se possa interrogar um homem que viveu há 2.500 anos, pelo menos quatro pesquisadores se encarregaram do trabalho de "detetive" de investigar o que Heródoto realmente disse ou quis dizer.

Os resultados de duas dessas investigações foram resumidas por Herz-Fischler e pelo matemático George Markowsky, da Universidade do Maine.

O texto original da *História* de Heródoto aparece no parágrafo 124 do livro II, chamado *Euterpe*. Nas traduções tradicionais está escrito: "Sua base é quadrada, cada lado tem oito plethra de comprimento e sua altura

é a mesma", ou "É um quadrado, 244 metros cada lado, e a mesma altura". Note que um plethron correspondia a 100 pés gregos, aproximadamente 101 pés ingleses (o que, por sua vez, corresponde aproximadamente a 31 metros).

Esses textos parecem bem diferentes do que foi apresentado como citação (de que o quadrado da altura é igual à área da face) de Heródoto. Além disso, os números das dimensões da pirâmide que Heródoto menciona estão totalmente errados. A Grande Pirâmide está longe de ter 244 metros (sua altura é de apenas 147 metros, aproximadamente), e mesmo o lado da base quadrada (cerca de 230 metros), tem muito menos que 244 metros. Então, de onde surgiu essa "citação"? A primeira pista vem do artigo de *sir* John Herschel em *The Athenaeum*. Segundo Herschel, foi John Taylor, no seu livro *A grande pirâmide: Por que foi construída e quem a construiu?*, que teve "o mérito de apontar" essa propriedade da pirâmide e a citação de Heródoto. Herz-Fischler seguiu a pista do equívoco até o que parece ser nada mais do que uma interpretação errada de Heródoto no livro, hoje vergonhoso, de John Taylor.

Taylor começa com uma tradução de Heródoto que não difere muito das anteriores: "dessa Pirâmide, que tem quatro lados, cada face tem, em cada lado, oito plethra, e altura igual". Neste ponto, porém, ele deixa sua imaginação correr solta, supondo que Heródoto quis dizer que o número de metros quadrados em cada face é igual ao número de metros quadrados de um quadrado com um lado igual à altura da pirâmide. Mesmo com essa interpretação "inventiva", ainda resta a Taylor o pequeno problema de que o número mencionado (oito plethra) está bem longe das verdadeiras medidas. A solução que sugere para esse problema é ainda mais espantosa. Sem qualquer justificativa, ele afirma que os oito plethra devem ser multiplicados pela área da base de uma das pequenas pirâmides que ficam no lado leste da Grande Pirâmide.

A conclusão de tudo isso é que o texto de Heródoto dificilmente pode ser considerado como algo que documente a presença da Razão Áurea na Grande Pirâmide. A interpretação totalmente infundada do texto, instigada

pelo livro de Taylor (e depois repetida inúmeras vezes), não faz sentido de fato e representa apenas mais um caso de prestidigitação numérica.

Nem todos concordam com esta conclusão. Num artigo intitulado "O Desenho Icosaédrico da Grande Pirâmide", publicado em 1992, Hugo F. Verheyen sugeriu que a Razão Áurea como símbolo místico pode ter sido deliberadamente escondido dentro do projeto da Grande Pirâmide "como uma mensagem para aqueles que entendem". Como veremos mais tarde, contudo, existem mais razões para se duvidar da idéia de que a Razão Áurea sequer apareça no projeto da pirâmide.

Quando percebemos que a Grande Pirâmide rivaliza com a lendária cidade de Atlântida no número de livros escritos a respeito, não devemos ficar muito surpresos ao sabermos que Φ não foi o único número especial a ser invocado na piramidologia — π também foi.

A teoria sobre π surgiu em 1838, em *Carta de Alexandria sobre a evidência da aplicação prática da quadratura do círculo, na configuração da grande pirâmide do Egito*, de H. Agnew, mas geralmente é atribuída a Taylor, que apenas repetiu a teoria de Agnew. Afirmam que a razão entre a circunferência da base ($8a$ na nossa notação anterior, na qual a era metade do lado da base) e a altura da pirâmide (h) é igual a 2π. Se usarmos as mesmas dimensões medidas que usamos anteriormente, veremos que $8a/h = 4 \times 755{,}79/481{,}4 = 6{,}28$, que é igual a 2π com uma precisão notável (diferindo apenas por cerca de 0,05%).

A primeira coisa a se notar, portanto, é que somente a partir das dimensões da Grande Pirâmide seria impossível determinar se Fi ou Pi, ou ambos, foram fatores no projeto da pirâmide. De fato, em um artigo publicado em 1968 na revista *The Fibonacci Quarterly*, o coronel R. S. Beard, de Berkeley, Califórnia, concluiu que: "Então, rolem os dados e escolham sua própria teoria."

Se temos de escolher entre π e Φ como possíveis fatores que contribuíram para a arquitetura da pirâmide, então π tem nítida vantagem sobre Φ. Primeiro, o Papiro Rhind (Ahmes), umas das nossas principais fontes de conhecimento sobre a matemática egípcia, informa que os antigos egíp-

cios do século XVII a.C. conheciam pelo menos um valor aproximado de π, ao passo que não existe absolutamente qualquer evidência de que conhecessem Φ. Lembre-se de que Ahmes copiou este compêndio matemático por volta de 1650 a.C., durante o período dos Hyksos ou dos reis pastores. No entanto, ele faz referências ao documento original da época do Rei Ammenemēs III, da 12ª Dinastia. E talvez não seja impossível (embora seja improvável) que o conteúdo do documento já fosse conhecido na época da construção da Grande Pirâmide. O papiro contém oitenta e sete problemas matemáticos, precedidos de uma tábua de frações. Há grande evidência (na forma de outros papiros e registros) de que a tábua continuou a servir de referência por quase dois mil anos. Na sua introdução, Ahmes descreve o documento como "a entrada para o conhecimento de todas as coisas existentes e todos os segredos obscuros". A estimativa egípcia de π aparece no problema 50 do Papiro Rhind, que trata da determinação da área de um campo circular. A solução de Ahmes sugere: "Tire $1/9$ do diâmetro e eleve ao quadrado o resto." Disso deduzimos que os egípcios aproximavam π por $256/81 = 3{,}16049...$, que difere por menos de 1% do valor correto de 3,14159...

Um segundo fato que dá a π uma vantagem sobre Φ é a interessante teoria de que os construtores incorporaram π no projeto da pirâmide mesmo sem conhecerem seu valor. Esta teoria foi desenvolvida por Kurt Mendelssohn em *O enigma das pirâmides*. A lógica de Mendelssohn funciona da seguinte maneira: como não existe qualquer evidência de que os egípcios da época do Antigo Reino tivessem algo além dos mais rudimentares elementos de matemática, a presença de π na geometria das pirâmides deve ser conseqüência de algum conceito prático de projeto, e não teórico. Mendelssohn sugere que os antigos egípcios podem não ter usado a mesma medida de comprimento para medir distâncias verticais e horizontais. Em vez disso, podem ter usado cordas de fibra de palmeira para medir a altura da pirâmide (em unidades de cúbitos) e tambores rolantes (um cúbito em diâmetro) para medir o comprimento da base da pirâmide. Desse modo, os comprimentos horizontais podem ter sido obtidos pela contagem das rota-

ções em unidades que poderíamos chamar de "cúbitos rodados". O que os arquitetos egípcios então tinham de fazer era escolher quantos cúbitos gostariam que seus operários construíssem para cima para cada cúbito horizontal rodado. Como um cúbito rodado é realmente igual a π cúbitos (a circunferência de um círculo com um diâmetro de um cúbito), este método de construção iria imprimir o valor de π no projeto da pirâmide mesmo sem os construtores saberem.

Obviamente, não é possível testar a especulação de Mendelssohn diretamente. Contudo, alguns egiptólogos afirmam que existe de fato evidência direta sugerindo *que nem a Razão Áurea nem Pi* foram usados no projeto da Grande Pirâmide (nem mesmo involuntariamente). Esta teoria é baseada no conceito do *seked*. O seked era simplesmente uma medida de inclinação dos lados da pirâmide ou, mais precisamente, o número de cúbitos horizontais que era necessário mover para cada cúbito vertical. Obviamente, isto era um importante conceito prático para os construtores, que precisavam manter uma forma constante para cada bloco de pedra subseqüente. Os problemas numerados de 56 a 60 no Papiro Rhind lidam com cálculos do *seked* e estão descritos em detalhes no excelente livro de Richard J. Gillings, *A Matemática no tempo dos faraós*. Em 1883, *sir* Flinders Petrie descobriu que a escolha de um seked (inclinação do lado da pirâmide) específico dá à Grande Pirâmide a propriedade da "razão entre a circunferência da base e a altura da pirâmide igual a 2π" com grande precisão, sem qualquer papel de π no desenho. Defensores da hipótese seked observam que exatamente o mesmo seked é encontrado numa pirâmide em Meidum, que foi construída pouco antes da Grande Pirâmide de Gisé.

Nem todos concordam com a teoria do seked. Kurt Mendelssohn escreveu: "Um grande número de explicações matemáticas foi sugerido e até mesmo uma, dada por um conhecido arqueólogo [Petrie], de que os construtores usaram por acaso a razão $^{14}/_{11}$ [= $^{28}/_{22}$, que é bem próxima de $^{4}/_{\pi}$], continua lamentavelmente pouco convincente." Por outro lado, Roger Herz-Fischler, que examinou nada menos do que nove teorias que foram apresentadas acerca do projeto da Grande Pirâmide, concluiu, num artigo

publicado no periódico *Crux Mathematicorum* em 1978, que a teoria do seked é, muito provavelmente, a correta.

De nossa perspectiva, porém, se uma das duas hipóteses, dos seked ou dos tambores, está correta, então a Razão Áurea não teve qualquer papel no projeto da Grande Pirâmide.

Será que está encerrado, então, o caso de 4.500 anos da Razão Áurea e da Grande Pirâmide? Certamente, esperaríamos que sim, mas, infelizmente, a história mostrou que o apelo místico das pirâmides e o Numerismo Áureo podem ser mais fortes do que qualquer evidência sólida. Os argumentos apresentados por Petrie, Gillings, Mendelssohn e Herz-Fischler estão disponíveis há décadas, mas isto não impediu a publicação de muitos livros novos que repetiam a falácia da Razão Áurea.

Para nosso objetivo, temos de concluir que é bastante improvável que os antigos babilônios ou os antigos egípcios tenham descoberto a Razão Áurea e suas propriedades. Esta tarefa foi deixada para os matemáticos gregos.

4

O SEGUNDO TESOURO

A Geometria tem dois grandes tesouros. Um é o Teorema de Pitágoras.
O outro, a divisão de uma linha nas razões extrema e média.
O primeiro podemos comparar a uma medida de ouro.
O segundo podemos chamar de uma jóia preciosa.

— JOHANNES KEPLER (1571-1630)

Não há dúvida de que qualquer pessoa que tenha crescido numa civilização do Ocidente ou do Oriente Médio seja discípula dos antigos gregos quando se trata de Matemática, Ciência, Filosofia, Arte e Literatura. A frase do poeta alemão Goethe — "de todos os povos, os gregos sonharam melhor o sonho da vida" — é apenas um pequeno tributo aos esforços pioneiros dos gregos em áreas do conhecimento que eles inventaram e batizaram.

No entanto, até mesmo as realizações dos gregos em muitos outros campos empalidecem em comparação com suas espantosas realizações na Matemática. Em um intervalo de apenas quatrocentos anos, por exemplo, de Tales de Mileto (em c. 600 a.C.) até o "Grande Geômetra" Apolônio de Perga (em c. 200 a.C.), os gregos completaram todos os elementos essenciais de uma teoria de geometria.

A excelência grega em Matemática foi, em grande parte, conseqüência direta de sua paixão pelo conhecimento em si mesmo, e não simplesmente por motivos práticos. Há uma história que diz que, quando um estudante que aprendia com Euclides uma proposição geométrica perguntou "Mas o que eu ganho com isso?", Euclides disse a seu escravo para dar ao garoto uma moeda, de modo que ele pudesse ver algum ganho concreto.

O currículo da educação de estadistas no tempo de Platão incluía Aritmética, Geometria, Geometria Sólida, Astronomia e Música — e todas, diz o pitagórico Archytas, encontravam-se sob a definição geral de "Matemática". Segundo a lenda, quando Alexandre, o Grande, pediu ao seu professor Menaechmus (a quem se atribui a descoberta das curvas da elipse, da parábola e da hipérbole) um atalho para a Geometria, ele recebeu como resposta: "Oh, rei, para viagens pelo país existem estradas reais e estradas para cidadãos comuns. Mas, na Geometria, existe uma estrada para todos."

PLATÃO

Nesse meio intelectual entra Platão (428/427 a.C. — 348/347 a.C.), uma das mentes mais influentes da Grécia antiga e da civilização ocidental em geral. Dizem que Platão estudou Matemática com o pitagórico Teodoro de Cirene, que foi o primeiro a provar que, além do $\sqrt{2}$, números como $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, até $\sqrt{17}$ também eram irracionais. (Ninguém sabe por que ele parou no 17, mas é óbvio que ele não tinha uma prova geral.) Alguns pesquisadores afirmam que Teodoro também pode ter usado uma linha cortada na Razão Áurea para obter o que pode ser a prova mais fácil de incomensurabilidade. (A idéia é essencialmente a mesma da demonstração apresentada no Apêndice 2.)

Como Platão afirma em *A República*, a Matemática era absolutamente necessária na educação de todos os chefes de estado e filósofos. Por conseguinte, a inscrição na entrada de sua escola (a Academia) diz: "Que pessoa alguma destituída de geometria entre por esta porta." O historiador da

matemática David Eugene Smith descreve isso em seu livro *Nossa dívida com a Grécia e com Roma* como a primeira exigência de vestibular da história. A admiração de Platão pela Matemática também aparece quando ele fala com certa inveja da atitude com relação à Matemática no Egito, onde "jogos aritméticos foram inventados para uso de simples crianças, e que elas aprendem com o seu prazer e seu divertimento".

Considerando o papel de Platão na matemática em geral, e em relação à Razão Áurea em particular, temos de examinar não só suas contribuições puramente matemáticas, que não foram muito significativas, mas os efeitos de sua influência e de seu estímulo para a matemática de outras pessoas da sua e das gerações seguintes. Até certo ponto, Platão pode ser considerado um dos primeiros teóricos autênticos. Suas inclinações teóricas podem ser bem exemplificadas por sua atitude em relação à Astronomia, na qual, em vez de observar as estrelas em seus movimentos, ele defendia a idéia de "deixar o céu de lado" e se concentrar no céu mais abstrato da Matemática. Esta, segundo Platão, é simplesmente representada pelas verdadeiras estrelas, assim como as entidades abstratas de ponto, linha e círculo são representadas por desenhos geométricos. É interessante ler o que *sir* Thomas Heath escreve no notável livro *Uma história da matemática grega* (1921): "É difícil ver o que Platão pode querer dizer pelo contraste que faz entre os ornamentos celestes visíveis [as estrelas visíveis e seus arranjos], que são realmente belos, e os verdadeiros ornamentos que eles apenas imitam, e que são infinitamente mais belos e maravilhosos."

Como astrofísico teórico, devo dizer que tenho bastante afinidade com alguns dos sentimentos expressos pela motivação subjacente de Platão. A distinção aqui é entre a beleza do próprio cosmo e a beleza da teoria que explica o Universo. Deixe-me esclarecer isso com um exemplo simples, cujo princípio foi descoberto pelo famoso pintor alemão Albrecht Dürer (1471-1528).

Você pode juntar seis pentágonos (Figura 19) para construir um pentágono maior, com cinco buracos na forma de Triângulos Áureos (triângulos isósceles com uma razão entre lado e base de Φ). Seis desses

pentágonos, por sua vez, formam juntos um pentágono ainda maior (e mais esburacado), e assim por diante.

Creio que todo mundo irá concordar que a figura obtida (Figura 19) é extremamente bela. Mas essa figura contém um apelo matemático adicional, que é a simplicidade do princípio subjacente de sua construção. Acredito que esse seja aquele céu matemático ao qual Platão se referiu.

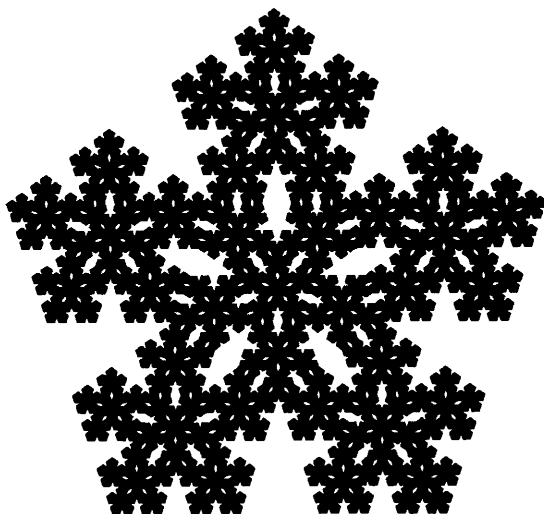


Figura 19

Há poucas dúvidas de que a orientação de Platão foi muito mais importante do que suas contribuições diretas. Um texto atribuído a Filodemo, do século I, diz: "Grande progresso em Matemática [foi alcançado] durante seu tempo, com Platão como o diretor e o fornecedor de problemas, e os matemáticos investigando-os zelosamente."

Mesmo assim, o próprio Platão certamente tinha um grande interesse pelas propriedades dos números e das figuras geométricas. Em *Leis*, por exemplo, ele sugere que o número ideal de cidadãos num estado é de 5.040 pois (a) é o produto de 12, 20 e 21; (b) a duodécima parte do número pode

ainda ser dividida por 12; (c) tem 59 divisores, incluindo todos os inteiros entre 1 e 12 (exceto o 11, mas 5.038, que é muito próximo, é divisível por 11). A escolha desse número e suas propriedades permitiram a Platão desenvolver sua visão socioeconômica. Por exemplo, a terra do estado é dividida em 5040 lotes, com 420 desses lotes constituindo o território de cada uma das doze "tribos". As pessoas desses estados são divididas em quatro categorias sociais: cidadãos livres e suas esposas e filhos, seus escravos, estrangeiros residentes, e uma população variada de visitantes estrangeiros. Em eleições para o Conselho, membros de todas as quatro categorias proprietárias votam em noventa membros de cada classe.

Outro número freqüentemente associado a Platão é o 216. Platão menciona este número em *A República* num trecho bastante obscuro que alude ao fato de 216 ser igual a 6 ao cubo, sendo 6 um dos números que representam casamento (pois é o produto do 2 feminino e do 3 masculino). Platão, ele próprio discípulo dos pitagóricos, também estava a par do fato de que a soma dos cubos dos lados do famoso triângulo pitagórico 3 – 4 – 5 é igual a 216.

Platão e a Seção Áurea estão ligados sobretudo por duas áreas que lhe eram especialmente caras: a incomensurabilidade e os sólidos platônicos. Em *Leis*, Platão expressa seu próprio sentimento de vergonha por ter aprendido a respeito dos comprimentos incomensuráveis e dos números irracionais relativamente tarde, e ele lamenta o fato de que muitos gregos de sua geração ainda não estavam familiarizados com a existência desses números.

Platão reconhece (em *Hippias Maior*) que, assim como um número par pode ser a soma de dois números pares ou de dois números ímpares, a soma de dois irracionais pode ser irracional ou racional. Como já sabemos que Φ é irracional, uma linha reta racional (por exemplo, de comprimento unitário) dividida numa Seção Áurea fornece um exemplo desse último caso, embora Platão talvez não soubesse desse fato. Alguns pesquisadores sustentam que Platão tinha um interesse direto pela Seção Áurea. Eles mencionam que, quando Proclus Diadochus (c. 411-485) escreve (em *Um comentário sobre o primeiro livro dos elementos de Euclides*) "Eudoxus... multiplicou o

número de teoremas que Platão originou referente, à 'seção'", ele pode estar se referindo à associação de Platão (e de Eudoxus) com a Seção Áurea. Essa interpretação, porém, tem sido objeto de séria controvérsia desde a segunda metade do século XIX, com muitos pesquisadores concluindo que a palavra "seção" provavelmente nada tinha a ver com a Seção Áurea, mas que se referia à seção de sólidos ou ao seccionamento geral de linhas. Mesmo assim, há pouca dúvida de que boa parte do trabalho de base que levou à definição e à compreensão da Razão Áurea foi realizada durante os anos que antecederam a abertura da Academia de Platão, em 386 a.C., e durante todo o período de funcionamento da Academia. A figura-chave e a força motriz que estavam por trás dos teoremas geométricos referentes à Razão Áurea era provavelmente Theaetetus (c. 417 a.C.-c. 369 a.C.), que, segundo a coleção bizantina *Suidas*, "foi o primeiro a construir os cinco chamados sólidos". Pappus, matemático do século IV, diz que também foi Theaetetus quem "distinguiu as potências que são comensuráveis em comprimento das que são incomensuráveis." Theaetetus não era diretamente ligado à Academia, mas ele certamente tinha vínculos informais com ela.

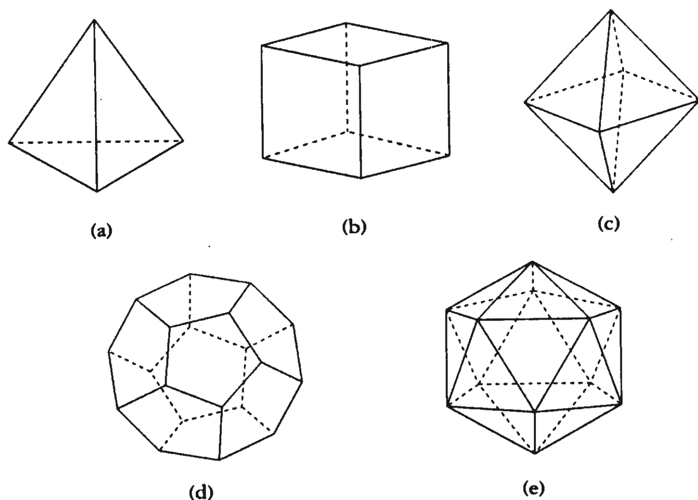


Figura 20

Em *Timaeus*, Platão se dedica ao imenso trabalho de discutir a origem e os mecanismos do cosmo. Especificamente, ele tenta explicar a estrutura da matéria usando os cinco sólidos regulares (ou poliedros), que já tinham sido investigados até certo ponto pelos pitagóricos e inteiramente por Theaetetus. Os cinco sólidos platônicos (Figura 20) se distinguem pelas seguintes propriedades: Eles são os únicos sólidos existentes nos quais todas as faces (de um determinado sólido) são idênticas e eqüiláteras, e cada um dos sólidos pode ser circunscrito numa esfera (com todos os seus vértices encostando na esfera). Os sólidos platônicos são o tetraedro (com quatro faces triangulares, Figura 20a), o cubo (com seis faces quadradas, Figura 20b), o octaedro (com oito faces triangulares, Figura 20c), o dodecaedro (com doze faces pentagonais, Figura 20d) e o icosaedro (com vinte faces triangulares, Figura 20e).

Platão combinou as idéias de Empédocles (c. 490-430 a.C.), de que os quatro elementos básicos da matéria são terra, água, ar e fogo, com a teoria "atômica" da matéria (a existência de partículas indivisíveis) de Demócrito de Abdera (c. 460 a.C.-370 a.C.). Sua teoria "unificada" sugere que cada um dos quatro elementos corresponde a um tipo diferente de partícula fundamental e é representado por um dos sólidos platônicos. Devemos perceber que, embora os detalhes tenham obviamente mudado bastante, a idéia básica por trás da teoria de Platão não é tão diferente da formulação de John Dalton da moderna química no século XIX. Segundo Platão, a terra é associada ao cubo estável; a qualidade "penetrante" do fogo, ao pontudo e relativamente simples tetraedro; o ar, à aparência "móvel" do octaedro, e a água, ao multifacetado icosaedro. O quinto sólido, o dodecaedro, era atribuído por Platão (em *Timaeus*) ao universo como um todo, ou, em suas palavras, o dodecaedro é aquele "que deus usou para ornamentar as constelações de todo o céu". Foi por este motivo que o pintor Salvador Dalí decidiu incluir um imenso dodecaedro flutuando acima da mesa da ceia em seu quadro "Sacramento da Última Ceia" (ver Figura 5).

A falta de um elemento fundamental para ser associado ao dodecaedro não foi aceita por todos os seguidores de Platão, alguns dos quais defenderam a existência de um quinto elemento. Aristóteles, por exemplo, consi-

derou o éter, a substância dos corpos celestes que ele supunha que permeava o universo inteiro, como a cósmica quinta essência ("quintessência"). Ele postulou que, por permear toda a matéria, essa quinta essência garantia que o movimento e a mudança pudessem ocorrer, de acordo com as leis da natureza. A idéia de uma substância que permeia todo o espaço como um meio necessário à propagação da luz continuou a valer até 1887, quando uma famosa experiência do físico americano Albert Abraham Michelson e do químico americano Edward Williams Morley mostrou que esse meio não existe (e nem é necessário, segundo a moderna teoria da luz). Basicamente, a experiência mediu a velocidade de dois raios de luz disparados em direções diferentes. Esperava-se que, devido ao movimento da Terra através do éter, as velocidades dos dois raios fossem diferentes, mas a experiência provou categoricamente que não eram. O resultado da experiência de Michelson-Morley pôs Einstein no caminho da Teoria da Relatividade.

Em uma surpreendente descoberta feita em 1998, dois grupos de astrônomos concluíram não só que nosso universo está se expandindo (um fato que já havia sido descoberto pelo astrônomo Edwin Hubble nos anos 1920), mas também que a expansão está se *acelerando*. Esta conclusão foi absolutamente chocante, pois os astrônomos naturalmente supunham que, devido à gravidade, a expansão deveria estar ficando mais lenta. Do mesmo modo que uma bola jogada para cima na Terra desacelera continuamente devido à força da gravidade (e acaba invertendo seu movimento), a força gravitacional exercida por toda a matéria no Universo deveria provocar desaceleração da expansão cósmica. A descoberta de que a expansão está se acelerando sugere a existência de alguma forma de "energia escura" que se manifesta como uma força repulsiva, que no Universo atual supera a força de atração da gravidade. Os físicos ainda estão se esforçando para entender a fonte e a natureza dessa "energia escura". Uma sugestão é que essa energia está associada a algum campo quântico que permeia o cosmo, um pouco como o conhecido campo eletromagnético. Tomando emprestada de Aristóteles a expresão "meio invisível", esse campo foi apelidado de "quintessência". Observamos, a propósito, que no filme de ficção científica "O

Quinto Elemento", de Luc Besson, de 1997, o "quinto elemento" do título foi escolhido como a própria força da vida — aquela que anima o inanimado.

A teoria de Platão era muito mais do que uma associação simbólica. Ele notou que as faces dos primeiros quatro sólidos poderiam ser construídas com dois tipos de triângulos retângulos, o triângulo isósceles 45°-90°-45° e o triângulo 30°-90°-60°. Platão explicou ainda como "reações químicas" básicas poderiam ser descritas com o uso dessas propriedades. Por exemplo, na "química" de Platão, quando a água é aquecida pelo fogo, ela produz duas partículas de vapor (ar) e uma partícula de fogo. Numa formulação de reação química, isto pode ser escrito como


{água} → 2{ar}+ {fogo}

ou, fazendo o balanço do número de faces envolvidas (nos sólidos platônicos que representam respectivamente esses elementos): $20 = 2 \times 8 + 4$. Embora essa descrição obviamente não esteja de acordo com nosso entendimento atual da estrutura da matéria, a idéia central — de que as partículas mais fundamentais no nosso Universo e suas interações podem ser descritas por uma teoria matemática que possui certas simetrias — é uma das bases da pesquisa atual em Física de Partículas.

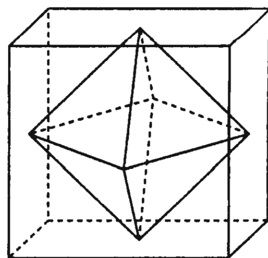
Para Platão, os fenômenos complexos que observamos no Universo não são os que realmente importam. As coisas realmente fundamentais são as simetrias subjacentes, e essas nunca mudam. Esta visão está bem alinhada com o pensamento moderno a respeito das leis da natureza. Por exemplo, essas leis não mudam de um lugar para outro no Universo. Por este motivo, podemos usar as mesmas leis que determinamos a partir de experiências de laboratório para estudarmos um átomo de hidrogênio aqui na Terra ou em uma galáxia que está a bilhões de anos-luz daqui. Esta simetria das leis da natureza se manifesta no fato de que a quantidade que chamamos de *momento linear* (que é igual ao produto entre a massa de um objeto e a sua velocidade, e tem a direção do movimento) é conservada, isto é, tem o mesmo valor se medirmos hoje ou daqui a um ano. Do mesmo modo, como as leis da natureza não mudam com a passagem do

tempo, a quantidade que chamamos de energia é conservada. Não podemos tirar energia do nada. Teorias modernas, baseadas em simetrias e leis de conservação, são, portanto, genuinamente platônicas.

A fascinação inicial dos pitagóricos pelo poliedro pode ter se originado das observações de cristais de pirita na Itália meridional, onde se localizava a escola pitagórica. A pirita, geralmente conhecida como o ouro dos tolos, quase sempre tem cristais com a forma de um dodecaedro. Contudo, os sólidos platônicos, sua beleza e suas propriedades matemáticas continuaram a cativar a imaginação das pessoas durante séculos depois de Platão, e eles aparecem nos lugares mais inesperados. Por exemplo, na obra de ficção científica de Cirano de Bergerac (1619-1655), *Uma viagem à Lua: com algum relato do mundo solar*, o autor usa uma máquina voadora com a forma de um icosaedro para fugir da prisão em uma torre e para pousar numa mancha solar.

A Razão Áurea, Φ, desempenha um papel fundamental nas dimensões e propriedades de simetria de alguns sólidos platônicos. Em particular, um dodecaedro com aresta de comprimento um (o segmento da junção de duas faces) tem a área total da superfície igual a $15\Phi\sqrt{3-\Phi}$ e um volume de $5\Phi^3/(6-2\Phi)$. De modo semelhante, um icosaedro com uma aresta de comprimento unitário tem um volume de $5\Phi^5/6$.

A simetria dos sólidos platônicos leva a outras propriedades interessantes. Por exemplo, o cubo e o octaedro têm o mesmo número de arestas (doze), mas o número de faces e de vértices estão trocados (o cubo tem seis faces e oito vértices e o octaedro tem oito faces e seis vértices). O mesmo vale para o dodecaedro e o icosaedro; ambos têm trinta arestas, e o dodecaedro tem doze faces e vinte vértices, enquanto o icosaedro é o contrário. Essas semelhanças nas simetrias dos sólidos platônicos permitem mapeamentos interessantes de um sólido para o seu sólido dual ou recíproco. Se ligarmos os centros de todas as faces de um cubo, obteremos um octaedro (Figura 21), ao passo que, se ligarmos os centros das faces de um


Figura 21

octaedro, obteremos um cubo. O mesmo procedimento pode ser usado para mapear um icosaedro em um dodecaedro e vice-versa, e a razão entre os comprimentos das arestas dos dois sólidos (um embutido no outro) assim obtidos pode novamente ser expressa em termos da Razão Áurea, como $\Phi^2/\sqrt{5}$. O tetraedro é auto-recíproco — a junção dos quatro centros das faces do tetraedro forma outro tetraedro.

Embora nem todas as propriedades dos sólidos platônicos fossem conhecidas na Antiguidade, nem Platão nem seus seguidores deixaram de ver sua fina beleza. Até certo ponto, até mesmo as dificuldades iniciais para se construir essas figuras (até que os métodos que usavam a Razão Áurea fossem descobertos) poderiam ser consideradas seus atributos. Afinal, a última frase em *Hippias Maior* diz: "Tudo que é belo é difícil". Em "Sobre o malogro dos oráculos", o historiador grego Plutarco (c. 46-120) escreve: "Uma pirâmide [um tetraedro], um octaedro, um icosaedro e um dodecaedro, as figuras primárias proclamadas por Platão, são belas pelas suas simetrias e igualdades nas suas relações, e nada superior ou mesmo igual foi deixado para a Natureza compor e encaixar."

Como foi mencionado acima, o icosaedro e o dodecaedro estão intimamente relacionados à Razão Áurea em mais de uma maneira. Por exemplo, os doze vértices de qualquer icosaedro podem ser divididos em três grupos de quatro, com os vértices de cada grupo encostado nos cantos de um Retângulo Áureo (um retângulo em que a razão entre o comprimento e a largura é a Razão Áurea). Os retângulos são perpendiculares entre si, e seu ponto comum é o centro do icosaedro (Figura 22). De modo semelhante, os centros das doze faces pentagonais do dodecaedro podem ser divididos em três grupos de quatro, e cada um desses grupos também forma um Retângulo Áureo.

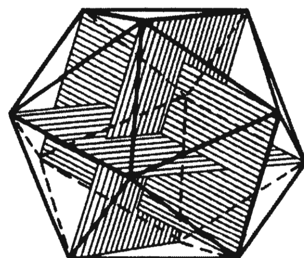


Figura 22

As associações entre algumas figuras planas, como o pentágono e o pentagrama, e alguns sólidos, como os sólidos platônicos, e a Razão Áurea

levam à inevitável conclusão de que o interesse grego pela Razão Áurea provavelmente começou com tentativas de se construir figuras planas e sólidos desses tipos. A maior parte desse esforço matemático ocorreu por volta do começo do século IV a.C. Mas existem numerosas afirmações de que a Razão Áurea está embutida no projeto arquitetônico do Partenon, que foi construído e decorado entre 447 e 432 a.C., durante o governo de Péricles. Será que essas afirmações podem ser verificadas?

O LUGAR DA VIRGEM

O Partenon ("o lugar da virgem" em grego) foi construído na Acrópole de Atenas como um templo sagrado para o culto de Atenas Partenos (Atenas, a Virgem). Os arquitetos foram Íctino e Calícrates. Fídias e seus assistentes e alunos foram incumbidos de supervisionar as esculturas. Grupos esculpidos ornamentavam os frontões que delimitavam o telhado nas extremidades ocidental e oriental. Um grupo representava o nascimento de Atenas e o outro, a disputa entre Atenas e Poseidon.

Um tanto decepcionante na sua simplicidade, o Partenon é uma das expressões arquitetônicas mais refinadas do ideal de pureza e unidade. Em 26 de setembro de 1687, a artilharia veneziana atingiu diretamente o Partenon durante um ataque contra os turcos otomanos que dominavam Atenas naquela época e que usavam o Partenon como um paiol de pólvora. Embora o dano tenha sido grande, a estrutura básica permaneceu intacta. Descrevendo este acontecimento, o general Königsmark, que acompanhava o comandante-de-campo, escreveu: "Como consternou Sua Excelência destruir o belo templo que existe há três mil anos!" Várias tentativas foram feitas, principalmente após o fim do controle turco (em 1830), para se descobrir alguma base matemática ou geométrica supostamente empregada para se obter a grande perfeição do desenho do Partenon. A maioria dos livros sobre a Razão Áurea afirma que as dimensões do Partenon, enquanto seu frontão triangular estava intacto,

ajustava-se perfeitamente a um Retângulo Áureo. Esta afirmação costuma ser acompanhada por uma figura semelhante à Figura 23. Supõe-se que a Razão Áurea também aparece em outras dimensões do Partenon. Por exemplo, em um dos mais extensos trabalhos sobre a Razão Áurea, *Der Goldne Schnitt* (A Seção Áurea), de Adolph Zeising, publicado em 1884, o autor afirma que a altura da fachada, do alto de seu tímpano até a parte inferior do pedestal embaixo das colunas, também se divide numa Razão Áurea com a parte de cima das colunas. Essa afirmação foi repetida em muitos livros, como no influente *Le Nombre d'or* (O Número Áureo, de 1931) de Matila Ghyka. Outros autores, como Miloutine Borissavlievitch em *O Número Áureo e a estética científica da arquitetura* (1958), embora não neguem a presença de Φ no projeto do Partenon, sugerem que o templo deve sua harmonia e sua beleza mais ao ritmo regular introduzido pela repetição da mesma coluna (um conceito chamado de "a lei do mesmo").

O surgimento da Razão Áurea no Partenon foi seriamente questionado por George Markowsky, matemático da Universidade do Maine em 1992, no seu artigo no *College Mathematics Journal* intitulado "Conceitos equivocados sobre a Razão Áurea". Markowsky primeiro aponta o fato de que, invariavelmente, partes do Partenon (por exemplo, as extremidades do pedestal; Figura 23) na verdade ultrapassam o esboço do Retângulo Áureo, um fato totalmente ignorado por todos os entusiastas da Razão Áurea. Mais importante ainda, as



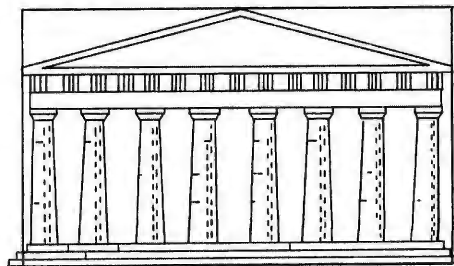


Figura 23

dimensões do Partenon variam de fonte para fonte, provavelmente porque foram usados diferentes pontos de referência nas medições. Este é outro exemplo de oportunidade de malabarismo numérico proporcionado pelas afirmações baseadas apenas em medições das dimensões. Usando os números citados por Marvin Trachtenberg e Isabelle Hyman em seu livro *Arquitetura: da pré-história ao pós-modernismo* (1985), não estou convencido de que o Partenon tenha qualquer relação com a Razão Áurea. Esses autores fornecem a altura de 13,75 metros e largura de 30,9 metros. Essas dimensões dão uma razão de altura/largura de aproximadamente 2,25, longe do 1,618... da Razão Áurea. Markowsky chama a atenção para o fato de que, mesmo se tomássemos a altura do ápice acima do pedestal sobre o qual a série de colunas se assenta (dado como 18 metros por Stuart Rossiter no livro *Grécia*, de 1977), ainda obteríamos uma razão de largura/altura de 1,72, que é mais próxima, mas ainda bem diferente do valor de Φ. Outros pesquisadores também são céticos a respeito do papel de Fi no projeto do Partenon. Christine Flon observa, em *O atlas mundial de arquitetura* (1984), que, embora "não seja improvável que alguns arquitetos... possam ter desejado basear seus trabalhos num sistema estrito de razões... seria errado generalizar."

Então, será que a Razão Áurea foi usada no projeto do Partenon? É difícil dizer com certeza. Embora a maioria dos teoremas matemáticos referentes à Razão Áurea (ou "razão extrema e média") pareça ter sido formulada depois da construção do Partenon, existia um conhecimento considerável entre os pitagóricos antes disso. Assim, os arquitetos do Partenon podem ter decidido basear seu projeto em alguma noção predominante de padrão estético. No entanto, isto é bem menos certo do que muitos livros querem nos fazer crer, e não é uma teoria particularmente sustentada pelas dimensões reais do Partenon.

Seja ou não verdade que a Razão Áurea aparece no Partenon, o que está claro é que qualquer que tenha sido o "programa" matemático referente à Razão Áurea instituído pelos gregos no século IV a.C., esse trabalho culminou com a publicação de *Elementos*, de Euclides, por volta de 300 a.C. De

fato, do ponto de vista da lógica e do rigor, *Elementos* é considerado há muito tempo uma apoteose de certeza no conhecimento humano.

RAZÃO EXTREMA E MÉDIA

Em 336 a.C., Alexandre (o Grande) da Macedônia, com 20 anos, subiu ao trono e, após uma seqüência de vitórias brilhantes, conquistou a maior parte da Ásia Menor, Síria, Egito e Babilônia e se tornou o governante do Império Persa. Alguns anos antes de sua morte precoce, com apenas 33 anos, ele fundou o que passou a ser o mais grandioso monumento ao seu nome — a cidade de Alexandria, perto da foz do Nilo.

Alexandria se localizava no cruzamento de três grandes civilizações: a egípcia, a grega e a judaica. Conseqüentemente, tornou-se um centro intelectual extraordinário que durou séculos e o local de origem de feitos extraordinários, como o Septuagint (cujo significado é "tradução dos 70") — a tradução grega do Antigo Testamento, tradicionalmente atribuída a setenta e dois tradutores. A tradução começou no século III a.C., e o trabalho progrediu em várias etapas durante cerca de um século.

Após a morte de Alexandre, Ptolomeu I adquiriu controle sobre os domínios egípcios e africanos por volta de 306 a.C., e uma de suas primeiras ações foi a instalação do equivalente de uma universidade (conhecido então como o Museu) em Alexandria. Essa instituição incluía uma biblioteca que, após um imenso esforço de acumulação, ficou famosa por possuir 700 mil livros (alguns confiscados de turistas azarados). A primeira equipe de professores da escola de Alexandria incluía Euclides, autor do livro mais conhecido da história da matemática — *Elementos* (*Stoichia*). Apesar de Euclides ser um autor de *best-sellers* (somente a Bíblia vendeu mais livros que *Elementos* até o século XX), sua vida é tão misteriosa que até mesmo seu local de nascimento é desconhecido. Dado o conteúdo de *Elementos*, é muito provável que Euclides tenha estudado matemática em Atenas com alguns dos alunos de Platão. De fato, Proclo escreve a respeito de Euclides:

"Esse homem viveu no tempo de primeiro Ptolomeu... ele é, então, mais novo que os discípulos de Platão, porém mais velho do que Eratóstenes e Arquimedes."

Elementos, uma obra de treze volumes sobre Geometria e Teoria dos Números, é tão colossal em seu escopo que às vezes tendemos a esquecer que Euclides foi o autor de quase uma dúzia de outros livros, abrangendo temas que iam de música a óptica, passando por mecânica. Somente quatro desses outros tratados foram preservados até o presente: *Divisão de figuras*, *Óptica*, *Fenômeno* e *Dados*. *Óptica* contém alguns dos mais antigos estudos de perspectiva.

Poucos irão discordar de que *Elementos* seja o maior e mais influente manual de matemática já escrito. Segundo uma história, quando Abraham Lincoln quis entender o verdadeiro sentido da palavra "prova" na profissão jurídica, começou a estudar os *Elementos* em sua cabana em Kentucky. O famoso lógico e filósofo britânico Bertrand Russell e descreve em sua *Autobiografia* seu primeiro encontro com os *Elementos* de Euclides (aos onze anos!) como "um dos grandes acontecimentos da minha vida, tão deslumbrante quanto o primeiro amor".

A figura do autor que surge das páginas de *Elementos* é a de um homem consciencioso, respeitador da tradição e muito modesto. Em nenhum lugar Euclides procura obter o crédito por um trabalho que não seja originalmente seu. Na verdade, ele não reivindica qualquer originalidade, apesar do fato de que é bastante óbvio que contribuiu com muitas provas novas, reorganizou totalmente o conteúdo desenvolvido por outros em volumes inteiros e planejou todo o trabalho. A justiça escrupulosa e a modéstia lhe valeram a admiração de Pappus de Alexandria, que por volta de 340 d.C. elaborou uma obra em oito volumes intitulada *Coleção* (*Synagoge*), que fornece um registro inestimável de muitos aspectos da matemática grega.

Em *Elementos*, Euclides tentou abranger a maior parte do conhecimento matemático de seu tempo. Os livros de I a VI tratam da Geometria plana que aprendemos na escola e que se tornou sinônimo do nome de Euclides (geometria euclidiana). Desses livros, os de número I, II, IV e VI discutem linhas

e figuras planas, enquanto o livro III apresenta teoremas relacionados ao círculo e o livro V traz uma extensa apresentação do trabalho sobre proporção iniciado por Eudoxus de Cnidus (408-355 a.C.). Os livros de VII a X tratam da Teoria dos Números e dos fundamentos da Aritmética. Especificamente, números irracionais são mais bem analisados no livro X, cujo conteúdo é, na maior parte, o trabalho de Theaetetus. O livro XI fornece as bases da geometria sólida; o livro XII (que descreve sobretudo o trabalho de Eudoxus) prova o teorema da área do círculo e o livro XIII (devido, na maior parte, a Theaetetus) demonstra as construções dos cinco sólidos platônicos.

Ainda nos tempos antigos, Hero (no primeiro século d.C.), Pappus (no século IV) e Proclo (no século V), todos de Alexandria, e Simplicius de Atenas (no século VI), escreveram comentários sobre *Elementos*. Uma nova revisão feita por Téon de Alexandria apareceu no século IV d.C. e serviu de base para todas as traduções até o século XIX, quando um manuscrito com um texto um tanto diferente foi descoberto no Vaticano. Na Idade Média, *Elementos* foi traduzido para o árabe três vezes. A primeira dessas traduções foi feita por al-Hajjāj ibn Yūsuf ibn Maṭar a pedido do califa Hārūn ar-Rashīd (que governou em 786-809), que conhecemos através das histórias de *As mil e uma noites*. Na Europa Ocidental, *Elementos* apareceu primeiramente em traduções para o latim das versões árabes. O monge beneditino inglês Adelard de Bath (c. 1070-1145), que, de acordo com algumas histórias, estava viajando pela Espanha disfarçado de estudante muçulmano, teve acesso a um texto árabe e completou a tradução para o latim por volta de 1120. Esta tradução passou a ser a base de todas as edições na Europa até o século XVI. Depois surgiram traduções em muitas línguas modernas.

Embora Euclides possa não ter sido o maior matemático que já existiu, certamente foi o maior professor de matemática. O manual que ele escreveu permaneceu em uso, praticamente inalterado, por mais de dois mil anos, até meados do século XIX. Até o detetive de ficção Sherlock Holmes, em *Um estudo em vermelho*, de Arthur Conan Doyle, afirmava que suas conclusões, obtidas por dedução, eram "tão infalíveis quanto muitas proposições de Euclides".

A Razão Áurea aparece em *Elementos* em vários lugares. A primeira definição da Razão Áurea ("razão extrema e média") relacionada a áreas é dada de forma um tanto indireta no livro II. Uma segunda e mais clara definição relativa à proporção aparece no livro VI. Euclides então usa a Razão Áurea, especialmente na construção do pentágono (no livro IV) e na construção do icosaedro e do dodecaedro (no livro XIII).



Figura 24

Vou usar um pouco de geometria bem simples para examinar a definição de Euclides e explicar por que a Razão Áurea é tão importante para a construção do pentágono. Na Figura 24, a linha *AB* é dividida pelo ponto *C*. A definição de Euclides no livro VI de razão extrema e média é que: (segmento maior)/(segmento menor) é igual a (linha inteira)/(segmento maior). Em outras palavras, na Figura 24:

$$AC/CB=AB/AC.$$

Como essa divisão de linha está relacionada com o pentágono? Em qualquer figura regular plana (aquelas com lados e ângulos internos iguais, conhecidos como *polígonos* regulares), a soma de todos os ângulos internos é dada por $180(n-2)$, onde n é o número de lados. Por exemplo, em um triângulo, $n = 3$ e a soma de todos os ângulos é de 180 graus. Num pentágono, $n = 5$ e a soma de todos os ângulos é 540 graus. Cada ângulo do pentágono é, portanto, igual a $540/5 = 108$ graus. Imagine agora que desenhamos duas diagonais adjacentes no pentágono, como na Figura 25a, formando assim três triângulos isósceles (com dois lados iguais). Como os dois ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais, os ângulos da base nos dois triângulos sobre os lados são de 36 graus cada — metade de

180°-108°. Obtemos assim os ângulos do triângulo do meio, 36 – 72 – 72 (como marcado na Figura 25a). Se bissectarmos um dos dois ângulos de base de 72 graus (como na Figura 25b), obteremos um triângulo menor *DBC* com os mesmos ângulos (36 – 72 – 72) do triângulo maior *ADB*. Usando geometria bem elementar, podemos mostrar que, segundo a definição de Euclides, o ponto *C* divide a linha *AB* exatamente na Razão Áurea. Além disso, a razão entre *AD* e *DB* também é igual à Razão Áurea. (Uma prova curta é dada no Apêndice 4.) Em outras palavras, num pentágono regular, a razão entre a diagonal e o lado é igual a Φ. Isto mostra que a capacidade de construir uma linha dividida em uma Razão Áurea nos dá ao mesmo tempo uma maneira simples de construir um pentágono regular. A construção do pentágono foi o principal motivo do interesse dos gregos pela Razão Áurea. O triângulo do meio na Figura 25a, com uma razão de Φ, entre o lado e a base, é conhecido como um *Triângulo Áureo*. Os dois triângulos laterais, com uma razão de 1/Φ entre o lado e a base, são às vezes chamados de *Gnômons Áureos*. A Figura 25b demonstra uma propriedade única dos Triângulos Áureos e dos Gnômons Áureos — eles podem ser bissectados em triângulos menores que também são Triângulos Áureos e Gnômons Áureos.

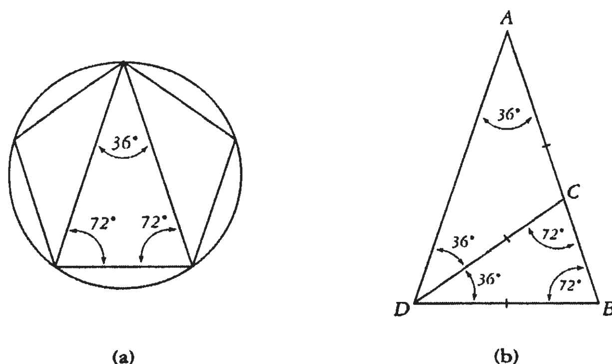


Figura 25

A associação da Razão Áurea com o pentágono, a simetria quíntupla e os sólidos platônicos é interessante por si mesma, e, de fato, foi mais do que suficiente para instigar a curiosidade nos antigos gregos. *A fascinação pitagórica* pelo pentágono e pelo pentagrama, somada ao interesse de Platão pelos sólidos regulares e sua crença de que estes representavam entidades cósmicas fundamentais incitaram gerações de matemáticos a trabalhar na formulação de numerosos teoremas referentes a Φ. Mas a Razão Áurea não teria alcançado o *status* quase reverencial que acabou atingindo se não fosse por suas propriedades algébricas verdadeiramente únicas. Para entendermos essas propriedades, precisamos primeiro achar o valor exato de Φ.

Examine novamente a Figura 24, e tomemos o comprimento do segmento menor, *CB*, como sendo 1 unidade, e o comprimento do maior, *AC*, com sendo x unidades. Se a razão entre x e 1 é a mesma que entre $x + 1$ (comprimento da linha *AB*) e x, então a linha terá sido cortada na razão extrema e média. Podemos facilmente resolver e achar o valor de x, a Razão Áurea. Da definição da razão extrema e média

$$\frac{x}{1}=\frac{x+1}{x}$$

Multiplicando os dois lados por x, obtemos $x^2 = x + 1$, que equivale à simples equação quadrática

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Caso você não lembre exatamente como se resolvem equações quadráticas, o Apêndice 5 relembra rapidamente. As duas soluções da equação para a Razão Áurea são:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

A solução positiva $(1 + \sqrt{5})/2 = 1{,}6180339887...$ dá o valor da Razão Áurea. Vemos agora claramente que Φ é irracional, sendo simplesmente metade da soma de 1 com a raiz quadrada de 5. Mesmo antes de continuar, podemos, perceber que este número tem algumas propriedades interessantes usando uma simples calculadora científica de bolso. Digite o número 1,6180339887 e aperte o botão [x^2]. Você vê alguma coisa surpreendente? Agora digite o número de novo, e desta vez aperte o botão [$1/x$]. Intrigante, não é? Enquanto o quadrado do número 1,6180339887... dá 2,6180339887..., seu inverso ("um sobre") dá 0,6180339887..., todos tendo exatamente os mesmos dígitos depois da vírgula! A Razão Áurea tem as propriedades únicas de produzir seu quadrado simplesmente somando 1, e seu recíproco subtraindo 1. E a propósito, a solução negativa da equação $x_2 = (1 - \sqrt{5})/2$ é exatamente igual a $-1/\Phi$.

Paul S. Bruckman, de Concord, Califórnia, publicou em 1977, no periódico *The Fibonacci Quarterly*, um divertido poema chamado "Constantemente Médio". Referindo-se à Razão Áurea como a "Razão Média", a primeira estrofe desse poema é:

A média áurea é algo absurdo,
Não é um irracional comum.
Se você o inverte (isso é divertido!),
Você a obtém de novo, reduzida de um.
Mas se pela unidade for somado,
Acredite, isso dá seu quadrado.

O fato de que nós agora temos uma expressão algébrica para a Razão Áurea nos permite, em princípio, calculá-la com grande precisão. Foi exatamente isso que M. Berg fez em 1966, quando gastou 20 minutos em um computador IBM 1401 para calcular Φ com 4.599 casas decimais. (Esse resultado foi publicado em *The Fibonacci Quarterly*.) O mesmo pode ser conseguido hoje praticamente em qualquer computador pessoal em menos de dois segundos. Na verdade, a Razão Áurea foi calculada com 10 milhões de casas decimais em dezembro de 1996, e isso levou cerca de trinta minutos. Para os verdadeiros entusiastas dos números, aqui está Φ com 2.000 casas decimais:

										Casa decimal
1.61803	39887	49894	84820	45868	34365	63811	77203	09179	80576	50
28621	35448	62270	52604	62818	90244	97072	07204	18939	11374	100
84754	08807	53868	91752	12663	38622	23536	93179	31800	60766	
72635	44333	89086	59593	95829	05638	32266	13199	28290	26788	200
06752	08766	89250	17116	96207	03222	10432	16269	54862	62963	
13614	43814	97587	01220	34080	58879	54454	74924	61856	95364	300
86444	92410	44320	77134	49470	49565	84678	85098	74339	44221	
25448	77066	47809	15884	60749	98871	24007	65217	05751	79788	400
34166	25624	94075	89069	70400	02812	10427	62177	11177	78053	
15317	14101	17046	66599	14669	79873	17613	56006	70874	80710	500
13179	52368	94275	21948	43530	56783	00228	78469	97829	77834	
78458	78228	91109	76250	03026	96156	17002	50464	33824	37764	
86102	83831	26833	03724	29267	52631	16533	92473	16711	12115	
88186	38513	31620	38400	52221	65791	28667	52946	54906	81131	
71599	34323	59734	94985	09040	94762	13222	98101	72610	70596	
11645	62990	98162	90555	20852	47903	52406	02017	27997	47175	
34277	75927	78625	61943	20827	50513	12181	56285	51222	48093	
94712	34145	17022	37358	05772	78616	00868	83829	52304	59264	
78780	17889	92199	02707	76903	89532	19681	98615	14378	03149	
97411	06926	08867	42962	26757	56052	31727	77520	35361	39362	1000
10767	38937	64556	06060	59216	58946	67595	51900	40055	59089	
50229	53094	23124	82355	21221	24154	44006	47034	05657	34797	
66397	23949	49946	58457	88730	39623	09037	50339	93856	21024	
23690	25138	68041	45779	95698	12244	57471	78034	17312	64532	
20416	39723	21340	44449	48730	23154	17676	89375	21030	68737	
88034	41700	93954	40962	79558	98678	72320	95124	26893	55730	
97045	09595	68440	17555	19881	92180	20640	52905	51893	49475	
92600	73485	22821	01088	19464	45442	22318	89131	92946	89622	
00230	14437	70269	92300	78030	85261	18075	45192	88770	50210	
96842	49362	71359	25187	60777	88466	58361	50238	91349	33331	
22310	53392	32136	24319	26372	89106	70503	39928	22652	63556	
20902	97986	42472	75977	25655	08615	48754	35748	26471	81414	
51270	00602	38901	62077	73224	49943	53088	99909	50168	03281	
12194	32048	19643	87675	86331	47985	71911	39781	53978	07476	
15077	22117	50826	94586	39320	45652	09896	98555	67814	10696	
83728	84058	74610	33781	05444	39094	36835	83581	38113	11689	
93855	57697	54841	49144	53415	09129	54070	05019	47754	86163	
07542	26417	29394	68036	73198	05861	83391	83285	99130	39607	
20144	55950	44977	92120	76124	78564	59161	60837	05949	87860	
06970	18940	98864	00764	43617	09334	17270	91914	33650	13715	2000

Por mais interessantes que sejam, você poderia pensar que as propriedades de Φ que descrevi até agora dificilmente justificam adjetivos como "Áureo" ou "Divino", e estaria certo. Mas isto foi apenas um primeiro vislumbre das maravilhas que estão por vir.

SURPRESAS EM ABUNDÂNCIA

Todo mundo conhece a sensação que temos quando reconhecemos de repente o rosto de um velho amigo numa festa em que achávamos que dificilmente encontraríamos alguém conhecido. Você também pode ter uma reação emocional semelhante quando vai a uma exposição de arte e de repente se depara com uma de suas pinturas favoritas. A idéia de "festa surpresa" na verdade é baseada no prazer e na gratificação que muitos de nós sentimos quando confrontados com essas aparições inesperadas. A matemática e a Razão Áurea em particular proporcionam um rico tesouro de surpresas desse tipo.

Imagine que estejamos tentando determinar o valor da seguinte expressão incomum que envolve raízes que continuam indefinidamente:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}\,.$$

Como poderíamos sequer começar a achar a resposta? Um caminho muito trabalhoso seria começar calculando $\sqrt{1+\sqrt{1}}$ (que é $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$), e depois calcular $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$, e assim por diante, esperando que os valores subseqüentes convirjam rapidamente para algum número. Mas pode haver um método mais curto e mais elegante de cálculo. Suponha que indiquemos o valor que procuramos com x. Então temos

$$x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}\,.$$

Agora vamos elevar os dois lados dessa equação ao quadrado. O quadrado de x é x^2 e o quadrado da expressão no lado direito da equação simplesmente retira a raiz mais externa (pela definição de raiz quadrada). Portanto, obtemos

$$x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}$$

Contudo, note que, como a segunda expressão do lado direito continua indefinidamente, é, na verdade, igual ao nosso x original. Portanto, obtemos a equação quadrática $x^2 = 1 + x$. Mas esta é exatamente a equação que define a Razão Áurea! Portanto, concluímos que nossa expressão infinita é de fato igual a Φ.

Vamos agora observar um tipo bem diferente de expressão que nunca termina, desta vez envolvendo frações:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}.$$

Este é um caso especial de entidade matemática conhecida como fração contínua, bastante usada em Teoria dos Números. Como poderíamos computar o valor dessa fração contínua? De novo, poderíamos, em princípio, truncar as séries de 1 em pontos sucessivamente maiores, esperando achar o limite para o qual a fração contínua converge. Mas, baseados em nossa experiência anterior, poderíamos pelo menos começar denotando o valor por x. Assim,

$$x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}.$$

Mas note que, como a fração contínua se estende indefinidamente, o *denominador* do segundo termo do lado direito da equação é, de fato, idêntico ao próprio *x*. Portanto, temos a equação

$$x=1+\frac{1}{x}.$$

Multiplicando dois lados por x temos $x^2 = x + 1$, que é de novo a equação que define a Razão Áurea! Assim, essa notável fração contínua também é igual a Φ. O poema de Paul S. Bruckman "Constantemente Médio" se refere também a essa propriedade:

Como fração contínua escrito
É um, um, um,..., indefinidamente
Em suma, o mais simples de seu tipo
(Isso não é um tanto surpreendente?)

Como a fração contínua correspondente à Razão Áurea é composta somente de uns, ela converge muito lentamente. A Razão Áurea é, neste sentido, mais "difícil" de expressar como uma fração do que qualquer outro número irracional — é o "mais irracional" dos irracionais.

De expressões que nunca terminam, vamos agora passar ao Retângulo Áureo, na Figura 26. Os comprimentos dos lados do retângulo estão em uma Razão Áurea entre si. Suponha que retiremos um quadrado desse retângulo (como indicado na figura). Terminaríamos com um retângulo menor que também é um Retângulo Áureo. As dimensões do retângulo "filho" são menores que as do retângulo "pai" exatamente pelo fator Φ. Podemos agora retirar um quadrado do Retângulo Áureo "filho" e teremos novamente um Retângulo Áureo, cujas dimensões são menores novamente pelo fator de Φ. Continuando este processo *ad infinitum*, produziremos Retângulos Áureos cada vez menores (cada vez com dimensões "deflacionadas" por um fator Φ). O Retângulo Áureo é o *único* retângulo com a propriedade de que, ao se cortar um quadrado, forma-se outro retângulo similar. Desenhe duas diagonais

em qualquer par de retângulos pai-filho da série, como na Figura 26, e todas irão se cruzar no mesmo ponto. A série de retângulos continuamente decrescentes converge para um ponto inalcançável. Devido às propriedades "divinas" atribuídas à Razão Áurea, o matemático Clifford A. Pickover sugeriu que deveríamos nos referir a esse ponto como "O Olho de Deus".

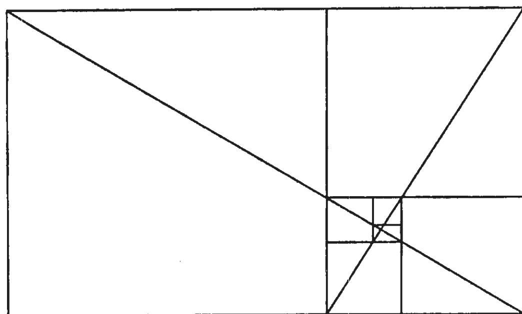


Figura 26

Se você não achou muito surpreendente que todas essas construções levem a Φ, pegue uma simples calculadora de bolso e mostrarei um truque mágico espantoso. Escolha dois números (com qualquer quantidade de dígitos) e anote-os um depois do outro. Então, usando a calculadora (ou a sua cabeça), forme um terceiro número, simplesmente somando os primeiros dois números (e escreva-o). Forme um quarto número somando o segundo número com o terceiro, um quinto, somando o terceiro com o quarto, um sexto número somando o quarto com o quinto, e assim por diante, até formar uma série de vinte números. Por exemplo, se seus primeiros números forem 2 e 5, você terá obtido a série 2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, 81 131... Agora, use a calculadora para dividir seu vigésimo número pelo décimo nono. O resultado parece familiar? Evidentemente, é Φ. Retornarei a esse truque e à sua explicação no Capítulo 5.

RUMO À IDADE MÉDIA

Na sua definição em *Elementos*, Euclides estava interessado principalmente na interpretação geométrica da Razão Áurea e em seu uso na construção do pentágono e de alguns sólidos platônicos. Seguindo seus passos, os matemáticos gregos dos séculos seguintes produziram muitos resultados geométricos novos envolvendo a Razão Áurea. Por exemplo, o "Suplemento" de *Elementos* (muitas vezes mencionado como livro XIV) contém um importante teorema sobre um dodecaedro e um icosaedro circunscritos pela mesma esfera. O texto de "Suplemento" é atribuído a Hipsicles de Alexandria, que provavelmente viveu no século II a.C., mas acredita-se que contenha teoremas de Apolônio de Perga (c. 262-190 a.C.), uma das três figuras-chave (junto com Euclides e Arquimedes) da Era de Ouro da matemática grega (de aproximadamente 300 até 200 a.C.). Novos acontecimentos referentes à Razão Áurea se tornaram mais esparsos depois desse período e estão associados principalmente a Hero (no século I d.C.), Ptolomeu (século II d.C.) e Pappus (século IV d.C.). Em *Metrica*, Hero apresenta aproximações (freqüentemente sem oferecer uma pista de como elas foram obtidas) para as áreas do pentágono e do decágono (o polígono de dez lados) e para os volumes de dodecaedros e icosaedros.

Ptolomeu (Claudius Ptolemaus) viveu por volta de 100 até 179 d.C., mas não se sabe praticamente nada a respeito de sua vida, exceto que produziu a maior parte de seu trabalho em Alexandria. Baseado em observações astronômicas próprias e anteriores, ele desenvolveu seu célebre modelo geocêntrico do universo, segundo o qual o Sol e todos os planetas giram em torno da Terra. Embora fundamentalmente errado, seu modelo conseguiu explicar (pelo menos inicialmente) os movimentos observados dos planetas e continuou a orientar o pensamento astronômico por treze séculos.

Ptolomeu sintetizou seu próprio trabalho astronômico e o de outros astrônomos gregos (particularmente Hiparcos de Nicéa) em um livro enciclopédico, de treze volumes, *Hē Mathēmatikē Syntaxis* (A síntese matemática). O livro se tornou conhecido mais tarde como *O grande astrônomo*. No

entanto, os astrônomos árabes do século IX se referiam ao livro invocando o superlativo grego "*Megistē*" ("O maior"), mas pondo antes o identificador árabe de nomes próprios, "al". O livro, portanto, ficou conhecido até os dias de hoje como *Almagesto.* Ptolomeu também fez trabalhos importantes em geografia e escreveu um livro influente intitulado *Guia para a geografia.*

No *Almagesto* e no *Guia para a geografia*, Ptolomeu construiu um dos mais antigos equivalentes de uma tábua trigonométrica para muitos ângulos. Especificamente, ele calculava comprimentos de cordas ligando dois pontos em um círculo para vários ângulos, incluindo os de 36, 72 e 108 graus, que, como você deve lembrar, aparecem no pentágono e estão, portanto, intimamente relacionados à Razão Áurea.

O último grande geômetra grego que desenvolveu teoremas relacionados à Razão Áurea foi Pappus de Alexandria. Em *Coleção* (*Synagoge*; 340 a.C.), Pappus apresenta um novo método de construção do dodecaedro e do icosaedro, e também comparações entre os volumes de todos os sólidos platônicos, sempre envolvendo a Razão Áurea. O comentário de Pappus a respeito da teoria de Euclides sobre os números irracionais traça de modo admirável o desenvolvimento histórico dos irracionais e subsiste nas traduções árabes. Porém, seus esforços heróicos para impedir o declínio generalizado da matemática e da geometria em particular não foram bem-sucedidos, e após sua morte, com a curiosidade intelectual do Ocidente totalmente devastada, o interesse pela Razão Áurea entrou num longo período de hibernação. A grande biblioteca de Alexandria foi destruída por uma série de ataques, primeiro dos romanos e depois dos cristãos e muçulmanos. Até a Academia de Platão acabou em 529 d.C., quando o imperador bizantino Justiniano ordenou o fechamento de todas as escolas gregas. Durante a deprimente Idade das Trevas que se seguiu, o historiador francês e bispo Gregory de Tours (538-594) lamentou-se: "O estudo das letras está morto em nosso meio." De fato, todo o empreendimento científico foi essencialmente transferido para a Índia e para o mundo árabe. Um fato importante desse período foi a introdução dos chamados numerais indo-arábicos e da notação decimal. O mais importante matemático hindu do século VI foi

Āryabhaṭa (c. 476-550). Em seu livro mais conhecido, intitulado *Āryabhaṭíya*, encontramos a frase "de um lugar para outro, cada um é dez vezes o anterior", que indica uma aplicação de um sistema de valor-de-lugar. Uma placa indiana de 595 já contém escrita (de uma data) em numerais hindus usando a notação decimal de valor-de-lugar, o que mostra que esses numerais estavam em uso havia algum tempo. O primeiro sinal (embora sem grande influência) dos numerais hindus chegando ao Ocidente pode ser encontrado nos textos do bispo nestoriano Severus Sebokht, que viveu em Keneshra, no rio Eufrates. Ele escreveu em 662: "Omitirei qualquer discussão sobre a ciência dos indianos... e seu valioso método de cálculo que ultrapassa a descrição. Eu desejo dizer apenas que essa computação é feita por meio de nove sinais."

Com o predomínio do islamismo, o mundo muçulmano passou a ser um importante centro de estudo da Matemática. Se não fosse a onda intelectual no Islã durante o século VIII, muito da antiga matemática teria se perdido. Em particular, o Califa al-Mamun (786-833) estabeleceu em Bagdá o Beit al-hikma (Casa do saber), que funciona de forma semelhante à da famosa universidade ou "Museu" de Alexandria. De fato, o império abácida absorveu todo o ensinamento alexandrino que sobrevivera. De acordo com a tradição, depois de ter um sonho em que Aristóteles aparecia, o califa decidiu mandar traduzir todas as obras dos antigos gregos.

Boa parte da importante contribuição islâmica era de natureza algébrica e abordou a Razão Áurea apenas de forma bem periférica. Mesmo assim, pelo menos três matemáticos deveriam ser mencionados: Al-Khwārizmī e Abu Kamil Shuja, do século IX, e Abu'l-Wafa, do século X.

Mohammed ibn-Musa al-Khwārizmī elaborou em Bagdá (por volta de 825), o que é considerado o mais influente trabalho algébrico do período — *Kitāb al-jabr wa al-muqābalah* (A ciência da restauração e da redução). Deste título ("*al-jabr*") vem a palavra "álgebra" que usamos hoje, já que foi o primeiro manual usado na Europa sobre essa matéria. Além disso, a palavra "algoritmo", que se refere a qualquer método especial para resolver um problema matemático por meio de uma série de procedimentos exatos, vem

de uma distorção do nome de al-Khwārizmī. A *ciência da restauração* foi sinônimo de teoria das equações por centenas de anos. A equação necessária para se resolver um dos problemas apresentados por al-Khwārizmī tinha uma semelhança considerável com a equação que define a Razão Áurea. Diz al-Khwārizmī: "Dividi dez em duas partes. Multipliquei uma por dez e a outra por si própria, e os produtos foram iguais". Al-Khwārizmī chama a variável desconhecida de shai ("a coisa"). Conseqüentemente, a primeira linha na descrição da equação obtida (para o problema acima) se traduz como: "você multiplica coisa por dez; são dez coisas." A equação que se obtém, $10x = (10 - x)^2$ é a do menor segmento de uma linha de comprimento 10 dividido numa Razão Áurea. Se al-Khwārizmī de fato tinha a Razão Áurea em mente quando propôs esse problema é uma questão polêmica. Sob a influência da obra de al-Khwārizmī, a variável desconhecida começou a ser chamada de "*res*" nos primeiros trabalhos algébricos em latim, traduzida para "cosa" ("coisa") em italiano. Conseqüentemente, a própria álgebra passou a ser conhecida como "*l'arte della cosa*" ("a arte da coisa".). Ocasionalmente era chamada de "*ars magna*" ("a grande arte"), para distingui-la do que era considerado a arte menor da Aritmética.

O segundo matemático árabe a fazer contribuições relacionadas à história da Razão Áurea foi Abu Kamil Shuja, conhecido como al-Hasib al-Misri, que significa "o Calculador do Egito". Ele nasceu por volta de 850, provavelmente no Egito, e morreu por volta de 930. Escreveu muitos livros, alguns dos quais foram preservados, entre eles o *Livro sobre álgebra*, o *Livro de coisas raras na arte do cálculo* e o *Livro sobre agrimensura e geometria*. Abu Kamil pode ter sido o primeiro matemático que, em vez de simplesmente achar uma solução para um problema, estava interessado em achar *todas* as soluções possíveis. Em seu *Livro de coisas raras na arte do cálculo*, ele chega a descrever um problema para o qual encontrou 2.678 soluções. Porém, é mais importante, do ponto de vista da história da Razão Áurea, destacar que os livros de Abu Kamil serviram de base para alguns dos livros do matemático italiano Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, que iremos encontrar em breve. O tratado de Abu Kamil *Sobre o pentágono e o*

decágono contém vinte problemas e suas soluções, nas quais ele calcula as áreas de figuras, os comprimentos de seus lados e os raios dos círculos circunscritos. Em alguns desses cálculos (mas não em todos), ele usa a Razão Áurea. Alguns dos problemas algébricos que aparecem em *Álgebra* podem ter sido inspirados pelo conceito da Razão Áurea.

O último dos matemáticos islâmicos que gostaria de mencionar é Mohammed Abu'l-Wafa (940-998). Abu'l-Wafa nasceu em Buzjan (atualmente Irã) e viveu durante o governo da dinastia islâmica Buyid no Irã e no Iraque ocidentais. Esta dinastia chegou ao auge no reinado de Ádud ad-Dawlah, que era um grande patrono da matemática, das ciências e das artes. Abu'l-Wafa foi um dos matemáticos convidados para a corte de Ádud ad-Dawlah em Bagdá, em 959. Seu primeiro grande livro foi o *Livro sobre o que é necessário da ciência da aritmética aos escribas e homens de negócios*, e, segundo Abu'l-Wafa, ele "contém tudo o que o experiente ou o novato, o subordinado ou o chefe em aritmética precisa saber". Curiosamente, embora Abu'l-Wafa fosse ele próprio um especialista no uso dos numerais hindus, todo o texto de seu livro é escrito sem qualquer numeral — os números são escritos apenas com palavras e os cálculos são feitos apenas mentalmente. Por volta do século X, o uso de numerais indianos não tinha encontrado aplicação nos círculos de negócios. O interesse de Abu'l-Wafa pela Razão Áurea aparece em seu outro livro: *Um livro sobre as construções geométricas que são necessárias a um artesão.* Neste livro, Abu'l-Wafa apresenta métodos engenhosos para a construção do pentágono e do decágono e para inscrever polígonos regulares em círculos e em outros polígonos. Um componente único de sua obra é a série de problemas que ele resolve usando régua e compasso, na qual o ângulo entre as duas pernas do compasso é mantido fixo (método conhecido como construção de "compasso enferrujado"). Este gênero específico provavelmente foi inspirado pela *Coleção* de Pappus, mas também pode representar a resposta de Abu'l-Wafa a um problema prático — os resultados com um compasso de ângulo fixo são mais precisos.

O trabalho desses e de outros matemáticos islâmicos produziu progresso importante, mas apenas adicional na história matemática da Razão Áu-

rea. Como acontece com freqüência nas ciências, esses períodos preparatórios de avanço lento são necessários para a geração da próxima grande idéia. O importante dramaturgo Bernard Shaw expressou uma vez sua opinião sobre o progresso com a frase: "O homem razoável se adapta ao mundo; o não-razoável insiste em tentar adaptar o mundo a ele. Portanto, todo progresso depende do homem não-razoável." No caso da Razão Áurea, o salto quântico teve de esperar o aparecimento do mais ilustre matemático europeu da Idade Média — Leonardo de Pisa.

5

FILHO DA BOA NATUREZA

Os nove números indianos são: 9 8 7 6 5 4 3 2 1.
Com esses nove números, e com o signo 0... qualquer número
Pode ser escrito, como está demonstrado abaixo.

— LEONARDO FIBONACCI (C. 1170-1240)

Com as palavras acima, Leonardo de Pisa (em latim Leonardus Pisanus), também conhecido como Leonardo Fibonacci, começou seu primeiro e mais conhecido livro, *Liber abaci* (*Livro do ábaco*), publicado em 1202. Na época em que o livro apareceu, apenas alguns intelectuais europeus privilegiados que se preocupavam em estudar as traduções das obras de al-Khwārizmī e Abu Kamil conheciam os numerais indo-arábicos que usamos hoje. Fibonacci, que por algum tempo viveu com seu pai, um funcionário de comércio e alfândega, em Bugia (atualmente na Argélia) e mais tarde viajou para outros países mediterrâneos (entre eles Grécia, Egito e Síria), teve oportunidade de estudar e comparar diferentes sistemas numéricos e métodos de operações aritméticas. Após concluir que os numerais indo-arábicos, que incluíam o princípio do valor de lugar, eram muito superiores a todos os outros métodos, ele dedicou os primeiros sete capí-

tulos de seu livro a explicações sobre a notação indo-arábica e suas aplicações práticas.

Leonardo Fibonacci nasceu na década de 1170, filho de um homem de negócios e funcionário do governo chamado Guglielmo. O apelido Fibonacci (do latim *filius* Bonacci, filho da família Bonacci, ou "filho da boa natureza") foi provavelmente introduzido pelo historiador de matemática Guillaume Libri numa nota de rodapé em seu livro *Histoire des Sciences Mathematique en Italie* (História das ciências matemáticas na Itália), de 1838, embora alguns pesquisadores atribuam o primeiro uso do nome Fibonacci a matemáticos italianos do fim do século XVIII. Em alguns manuscritos e documentos, Leonardo se refere a si mesmo e é citado por outros como Leonardo Bigollo (ou Leonardi Bigolli Pisani), em que "Bigollo" significa algo como "viajante" ou "homem sem importância" nos dialetos toscano e veneziano respectivamente. A Pisa do século XII era um porto movimentado através do qual passavam mercadorias que vinham do interior e do ultramar. Especiarias do Extremo Oriente circulavam por Pisa a caminho da Europa setentrional, cruzando no porto com as rotas do vinho, do óleo e do sal que eram transportados entre diferentes partes da Itália,, Sicília e Sardenha. A grande indústria de couro de Pisa importava peles de cabras do norte da África, e curtidores podiam ser vistos preparando as peles nas margens do rio de Pisa. A cidade, no rio Arno, também se orgulhava de seus excelentes trabalhos de ferragem e dos estaleiros. Pisa é mais conhecida hoje por sua famosa torre inclinada, e a construção dessa torre de sino começou durante a juventude de Fibonacci. É claro que toda essa agitação comercial exigia muitos registros de estoques e preços. Leonardo seguramente teve oportunidade de observar vários escribas enquanto listavam preços em numerais romanos e os somavam usando um ábaco. Operações aritméticas com numerais romanos não são divertidas. Por exemplo, para se obter a soma de 3.786 e 3.843, seria necessário adicionar MMMDCCLXXXVI a MMMDCCCXLIII. Se você acha isso trabalhoso, tente multiplicar estes números. Porém, enquanto os mercadores medievais ficassem nas simples somas e subtrações, eles poderiam se virar com numerais romanos. O elemento fundamental que faltava nos numerais romanos era, é

claro, o sistema de valor-de-lugar — o fato de que um número escrito como 547 na verdade significa $(5 \times 10^2) + (4 \times 10^1) + (7 \times 10^0)$. A Europa Ocidental superou a falta de um princípio de valor-de-lugar em seu sistema numérico usando o ábaco. O nome "ábaco" pode ter se originado de *avaq*, a palavra hebraica para pó, já que os instrumentos mais antigos de calcular eram simplesmente tabuleiros empoeirados com areia nos quais poderiam ser traçados os números. Na época de Fibonacci, o ábaco tinha peças de contar que deslizavam em fios. Os diferentes fios do ábaco faziam o papel do valor-de-lugar. Um ábaco típico tinha quatro fios, com as contas no fio de baixo representando unidades, depois dezenas, na terceira, centenas e na linha de cima, milhares. Assim, embora o ábaco fornecesse um meio razoavelmente eficiente para operações aritméticas simples (fiquei impressionado ao descobrir, em uma visita a Moscou em 1990, que a cafeteria de meu hotel ainda usava um ábaco), ele obviamente apresentava enormes desvantagens ao lidar com operações mais complexas. É impossível imaginar, por exemplo, a tentativa de manipular os "bilhões e bilhões" da astronomia popularizados por Carl Sagan usando um ábaco.

Em Bugia (hoje Bejaïa), na Argélia, Fibonacci se inteirou da arte dos nove números da Índia, provavelmente, nas suas palavras, com a "excelente instrução" de um professor árabe. Após um *tour* pelo Mediterrâneo que serviu para expandir seus horizontes matemáticos, ele decidiu publicar um livro que introduziria o uso dos numerais indo-arábicos de modo mais generalizado na vida comercial. Em seu livro, Fibonacci explica meticulosamente a tradução dos numerais romanos para o novo sistema e as operações aritméticas com os novos números. Dava muitos exemplos que demonstravam a aplicação de sua "nova matemática" a uma variedade de problemas, que iam de práticas comerciais e do enchimento e esvaziamento de cisternas ao movimento de navios. No começo do livro, Fibonacci acrescenta a seguinte apologia: "Se por acaso omiti alguma coisa mais ou menos oportuna ou necessária, peço perdão, pois não existe ninguém que não cometa erros e seja prudente em todos os assuntos."

Em muitos casos, Fibonacci dava mais de uma versão do problema, e demonstrava assombrosa versatilidade na escolha de vários métodos de so-

lução. Além disso, sua álgebra era freqüentemente retórica, explicando em palavras a solução desejada em vez de resolver equações explícitas, como faríamos hoje. Aqui está um belo exemplo de um dos problemas que apareceu em *Liber abaci* (como foi traduzido no charmoso livro *Leonardo de Pisa e a nova matemática da Idade Média,* de Joseph e Frances Gies):

> Um homem cujo fim se aproximava chamou seus filhos e disse: "Dividam meu dinheiro do modo como irei descrever." Para seu filho mais velho, ele disse: "Você terá 1 *bezant* [uma moeda de ouro originalmente cunhada em Bizâncio] e um sétimo do que sobrar." Ao segundo filho, disse: "Pegue dois *bezants* e um sétimo do que sobrar." Ao terceiro filho, disse: "Você pegará 3 *bezants* e um sétimo do que sobrar." Assim, ele deu a cada filho 1 *bezant* a mais do que ao filho anterior e um sétimo do que restava e, para o último filho, tudo o que restava. Após seguirem cuidadosamente as instruções, os filhos viram que tinham dividido sua herança igualmente. Quantos filhos havia e qual o tamanho da herança?

Para o leitor interessado, apresento a solução algébrica (moderna) e a solução retórica de Fibonacci para este problema no Apêndice 6.

O *Liber abaci* deu a Fibonacci um reconhecimento considerável, e sua fama chegou até os ouvidos do imperador romano Frederico II, conhecido como "Stupor Mundi" ("Maravilha do Mundo") por patrocinar a matemática e as ciências. Fibonacci foi convidado a comparecer diante do imperador em Pisa no início dos anos 1220, e foi apresentado a uma série de problemas que eram considerados muito difíceis pelo mestre Johannes de Palermo, um dos matemáticos da corte. Um dos problemas pode ser descrito da seguinte forma: "Encontre um número *racional* (um número inteiro ou fração) tal que quando 5 é somado ou subtraído do seu quadrado, o resultado [em cada caso] também seja igual ao quadrado de um número racional." Fibonacci resolveu todos os problemas usando métodos engenhosos. Mais tarde ele descreveu dois deles em um livro curto chamado *Flos* (Flor) e usou o problema acima no prólogo de um livro que

ele dedicou ao imperador: *Liber quadratorum* (Livro dos quadrados). Hoje temos de ficar impressionados com o fato de que, sem a ajuda de computadores ou calculadoras de qualquer tipo, simplesmente através de sua manipulação virtuosa da Teoria dos Números, Fibonacci tenha sido capaz de ver que a solução para o problema acima era $^{41}/_{12}$. De fato, $(^{41}/_{12})^2 + 5 = (^{49}/_{12})^2$ e $(^{41}/_{12})^2 - 5 = (^{31}/_{12})^2$.

O papel de Fibonacci na história da Razão Áurea é realmente fascinante. Por um lado, nos problemas em que usava conscientemente a Razão Áurea, foi responsável por um progresso significativo mas não espetacular. Por outro, simplesmente formulando um problema que, em princípio, nada tinha a ver com a Razão Áurea, ele expandiu drasticamente o escopo da Razão Áurea e de suas aplicações.

As contribuições diretas de Fibonacci para a literatura da Razão Áurea aparecem num livro pequeno sobre geometria, *Practica Geometriae* (Prática de Geometria), que foi publicado em 1223. Ele apresentou novos métodos para o cálculo da diagonal e da área do pentágono, cálculos dos lados do pentágono e do decágono a partir do diâmetro do círculo inscrito e do circunscrito, e computações de volumes do dodecaedro e do icosaedro, todos os quais estão intimamente ligados à Razão Áurea. Na solução desses problemas, Fibonacci demonstra um profundo conhecimento da geometria euclidiana. Embora suas técnicas matemáticas empreguem até certo ponto trabalhos anteriores, em particular *Sobre o pentágono e o decágono*, de Abu Kamil, há poucas dúvidas de que Fibonacci aprimorou o uso das propriedades da Razão Áurea em várias aplicações geométricas. Contudo, sua contribuição mais importante para a Razão Áurea e a que mais lhe trouxe fama deriva de um problema aparentemente inocente do *Liber abaci*.

TODOS OS PENSAMENTOS DE UM COELHO SÃO COELHOS

Muitos estudantes de matemática, ciências e artes ouviram falar de Fibonacci somente por causa do seguinte problema do Capítulo XII do *Liber abaci*.

> Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir deste par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês.

Como o número de filhotes de coelhos pode ter qualquer conseqüência matemática importante? De fato, a solução do problema é bastante simples. Comecemos com um par. Após o primeiro mês, o primeiro par dá à luz outro par, de modo que ficamos com dois pares. Na Figura 27, represento um par maduro com o símbolo de um coelho grande e um par jovem com um símbolo menor. Após o segundo mês, o par maduro dá à luz outro par jovem, enquanto o par de filhotes amadurece. Portanto, ficam três pares, como desenhado na figura. Após o terceiro mês, cada um dos dois pares maduros dá à luz outro par, e o par de filhotes amadurece, o que nos deixa com cinco pares. Após o quarto mês, cada um dos três pares maduros dá à luz um par, e os dois pares de filhotes crescem, resultando em um total de oito pares. Após cinco meses, temos um par de filhotes de cada um dos cinco pares de adultos, mais três pares amadurecendo num total de treze pares. Neste ponto, entendemos como proceder para obter o número de pares adultos, de pares filhotes e o total de pares nos sucessivos meses. Suponha que examinemos apenas o número de pares adultos em um determinado mês. Este número é formado pelo número de pares adultos no mês anterior, mais o número de pares de filhotes (que amadureceram) do mesmo mês anterior. Porém, o número de pares de filhotes do mês anterior é, na verdade, igual ao número de pares de adultos que existia no mês que antecedeu o mês em questão. Assim, em qualquer mês (começando com o terceiro), o número de pares de adultos é simplesmente igual à soma do número de pares de

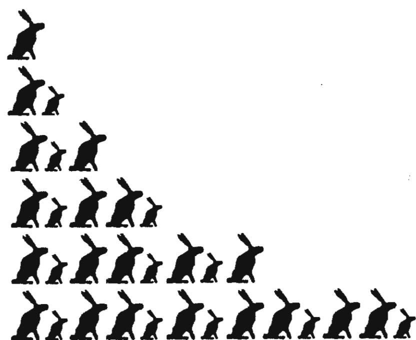


Figura 27

adultos nos dois meses anteriores. O número de pares de adultos, portanto, segue a seqüência: 1, 1, 2, 3, 5, 8,... Você pode ver facilmente na figura que o número de pares de filhotes segue exatamente a mesma seqüência, apenas com a diferença de um mês, a saber, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8,... é claro que o número total de pares é simplesmente a soma desses números, que dá a mesma seqüência dos pares de adultos, com o primeiro termo omitido (1, 2, 3, 5, 8,...). A seqüência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,..., na qual cada termo (começando com o terceiro) é igual à soma dos dois termos anteriores, foi apropriadamente chamada de seqüência de Fibonacci no século XIX pelo matemático francês Edouard Lucas (1842-1891). Seqüências de números nas quais a relação entre termos sucessivos pode ser expressa por uma fórmula matemática são conhecidas como recursivas. A seqüência de Fibonacci foi a primeira dessas seqüências recursivas conhecida na Europa. A propriedade geral de que cada termo na seqüência é igual à soma dos dois anteriores é expressa matematicamente como (uma notação introduzida em 1634 pelo matemático Albert Girard): $F_{n+2} = F_{n-1} + F_n$. Aqui, F_n representa o n-ésimo número na seqüência (por exemplo, F_5 é o quinto termo). F_{n+1} é o termo que segue F_n (para $n = 5$, $n + 1 = 6$), e F_{n+2} vem depois de F_{n+1}.

O nome de Fibonacci é tão famoso hoje porque a seqüência de Fibonacci está longe de ficar limitada à reprodução de coelhos. A propósito, o título deste capítulo foi inspirado em *A História Natural do Intelecto*, de Ralph Waldo Emerson, publicado em 1893. Diz Emerson: "Todos os pensamentos de uma tartaruga são tartarugas, e de um coelho, coelhos." Encontraremos a seqüência de Fibonacci em uma variedade inacreditável de fenômenos aparentemente sem relação.

Para começar, vamos examinar um fenômeno que está tão distante do tema da geração de coelhos quanto se pode imaginar — a óptica dos raios de luz. Suponha que temos duas placas de vidro ligeiramente diferentes (propriedades de refração de luz, ou "índices de refração" diferentes) colocadas face a face (como na Figura 28a). Se expusermos as placas à luz, os raios podem (em princípio) se refletir internamente em quatro superfícies

antes de emergir (Figura 28a). Mais especificamente, eles podem passar diretamente sem se refletir em nada ou podem ter uma reflexão interna, duas reflexões internas, três reflexões internas, e assim por diante — potencialmente, um número infinito de reflexões internas antes de emergir. Todos esses são caminhos permitidos pelas leis da óptica. Agora, conte o número de raios que emergem desse sistema de duas placas. Há apenas um raio emergente no caso de não reflexão (Figura 28b). Há dois raios de luz emergentes considerando-se todas as possibilidades quando os raios podem ter exatamente uma reflexão interna (Figura 28c), pois existem dois caminhos que podem seguir. Há três raios de luz emergentes para todas as possibilidades de duas reflexões internas (Figura 28d); cinco raios de luz para três reflexões (Figura 28e); oito caminhos se o raio reflete quatro vezes (Figura 28f); treze caminhos para cinco reflexões (Figura 28g); e assim por diante. O número de raios de luz que surgiu — 1, 2, 3, 5, 8, 13,... — forma uma seqüência de Fibonacci.

Agora considere o seguinte problema, totalmente diferente. Uma criança está tentando subir uma escada. O número máximo de degraus que ela consegue subir de uma vez é dois, isto é, ela pode subir um ou dois degraus de cada vez. Se existem n degraus na escada, de quantas maneiras diferentes, C_n, ela pode subir? Se existe somente um degrau ($n = 1$), obviamente só há um jeito de subir a escada, $C_1 = 1$. Se existem dois degraus, a criança pode subir dois degraus de uma vez ou subir um de cada. Assim, há duas maneiras, $C_2 = 2$. Se há três degraus, existem três maneiras de subir: 1 + 1 + 1, ou 1 + 2, ou 2 + 1. Assim, $C_3 = 3$. Se existem quatro degraus, o número de maneiras de subir aumenta para $C_4 = 5$: 1 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 2, 1 + 2 + 1, 2 + 1 + 1, 2 + 2. Para cinco degraus, há oito possibilidades, $C_5 = 8$: 1 + 1 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 2, 1 + 1 + 2 + 1, 1 + 2 + 1 + 1, 2 + 1 + 1 + 1, 2 + 2 + 1, 2 + 1 + 2, 1 + 2 + 2. Vemos que o número de possibilidades, 1, 2, 3, 5, 8,... forma uma seqüência de Fibonacci.

Finalmente, vamos examinar a árvore genealógica de um zangão, o macho da abelha. Os ovos de abelhas operárias que não são fertilizados se *tornam* zangões. Desse modo, um zangão não tem um "pai", somente uma

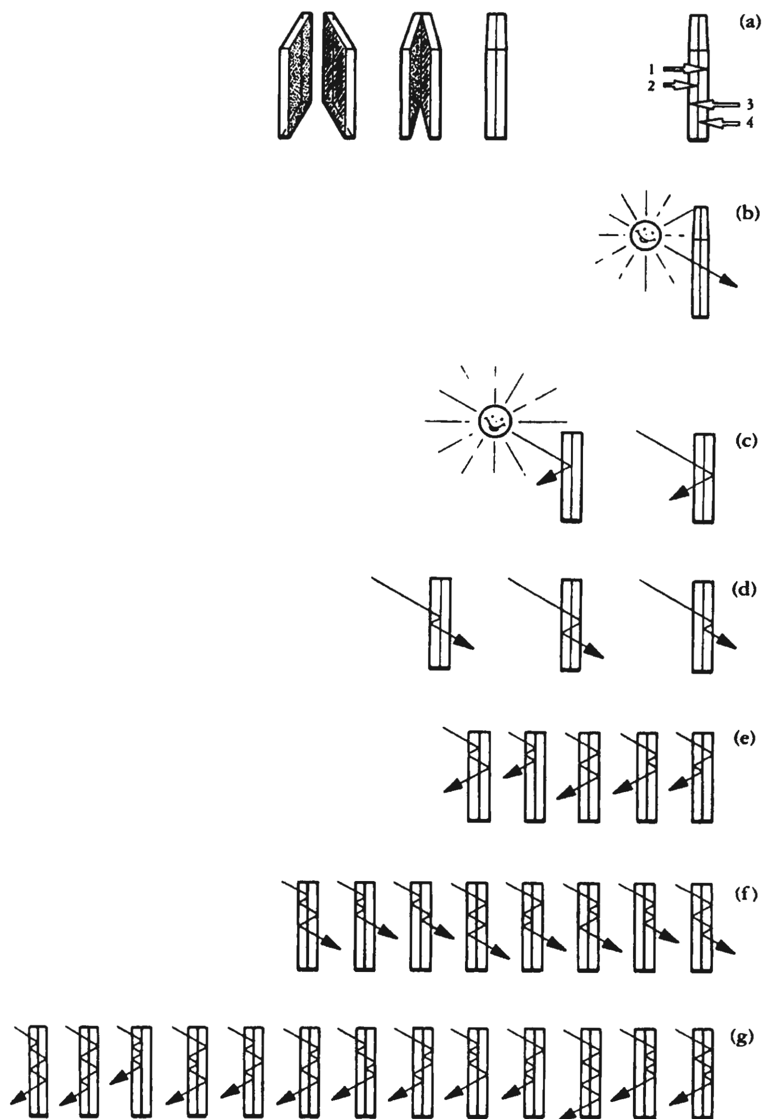
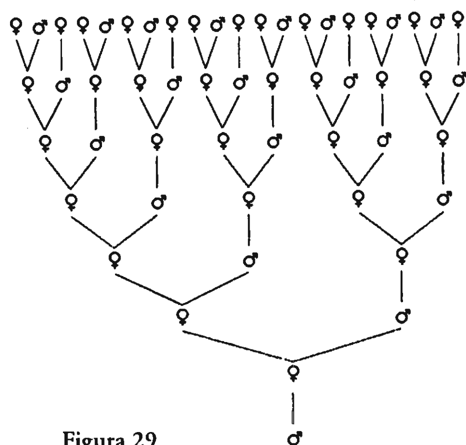


Figura 28


Figura 29

"mãe". Os ovos da rainha, por outro lado, são fertilizados por zangões e se tornam fêmeas (operárias ou rainhas). Uma abelha tem, portanto, uma "mãe" e um "pai". Conseqüentemente, um zangão tem uma mãe, dois avós (os pais de sua mãe), três bisavós (os dois pais da avó mais a mãe do avô), cinco trisavós (dois para cada bisavó e um para seu bisavô), e assim por diante. Os números da árvore genealógica, 1, 1, 2, 3, 5,... formam uma seqüência de Fibonacci. A árvore é apresentada graficamente na Figura 29.

Tudo isso parece bastante intrigante — a mesma série de números se aplica a coelhos, à óptica, ao ato de subir escadas e à arvore genealógica de um zangão — mas como essa seqüência de Fibonacci se relaciona com a Razão Áurea?

FIBONACCIS ÁUREOS

Examine novamente a seqüência de Fibonacci; 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987..., e desta vez vamos observar as razões dos números sucessivos (calculados aqui até a sexta casa decimal):

1/1 = 1,000000
2/1 = 2,000000
3/2 = 1,500000
5/3 = 1,666666
8/5 = 1,600000
13/8 = 1,625000

21/13 = 1,615385
34/21 = 1,619048
55/34 = 1,617647
89/55 = 1,618182
144/89 = 1,617978
233/144 = 1,618056
377/233 = 1,618026
610/377 = 1,618037
987/610 = 1,618033

Você reconhece esta última razão? À medida que avançamos na seqüência de Fibonacci, a razão entre dois números sucessivos de Fibonacci oscila em torno da Razão Áurea (sendo alternadamente maior e menor), mas se aproxima cada vez mais dela. Se denotamos o *n*-ésimo número de Fibonacci como F_n e o seguinte como F_{n+1}, então descobriremos que a razão F_{n+1}/F_n se aproxima de Φ quando n aumenta. Esta propriedade foi descoberta em 1611 (embora possivelmente um anônimo italiano o tenha feito antes) pelo famoso astrônomo alemão Johannes Kepler; entretanto mais de cem anos se passaram antes que a relação entre os números de Fibonacci e a Razão Áurea fosse provada (e, mesmo assim, não totalmente) pelo matemático escocês Robert Simson (1687-1768). Kepler, aliás, aparentemente topou com a seqüência de Fibonacci por conta própria e não lendo o *Liber abaci*.

Mas por que os termos de uma seqüência derivada do acasalamento de coelhos se aproximariam de uma razão definida por meio da divisão de uma linha? Para entender essa conexão, temos de voltar às espantosas frações contínuas que encontramos no Capítulo 4. Lembre-se de que vimos que a Razão Áurea pode ser escrita como

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}.$$

Em princípio, poderíamos calcular o valor de Φ por uma série de aproximações sucessivas, na qual interromperíamos as frações contínuas mais e mais adiante. Suponha que tentássemos fazer exatamente isso. Iríamos encontrar a série de valores (lembrete: 1 sobre *a/b* é igual a *b/a*):

$$1=1.00000$$

$$1+\frac{1}{1}=\frac{2}{1}=2.00000$$

$$1+\frac{1}{1+1}=\frac{3}{2}=1.50000$$

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}=\frac{5}{3}=1.66666$$

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}=\frac{8}{5}=1.60000$$

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}}=\frac{13}{8}=1.62500.$$

Em outras palavras, as aproximações sucessivas que encontramos para a Razão Áurea são exatamente iguais às razões dos números de Fibonacci. Não é de espantar então que, à medida que vamos para termos cada vez maiores na seqüência, a razão tenda para a Razão Áurea. Esta propriedade é descrita de

maneira admirável no livro *On Growth and Form* (Sobre crescimento e forma), do famoso naturalista *sir* D'Arcy Wentworth Thompson (1860-1948). Ele escreve sobre os números de Fibonacci: "Sobre esses números famosos e fascinantes, um amigo matemático me escreve: 'Todo o romance das frações contínuas, relações de recorrência linear,... recai sobre eles, e eles são uma fonte de curiosidade inesgotável. Como é interessante vê-los se esforçando para atingir o inatingível, a Razão Áurea, por exemplo; e esta é apenas uma entre centenas de relações desse tipo.'" A convergência para a Razão Áurea, aliás, explica o truque mágico que descrevi no Capítulo 4. Se você define uma série de números pela propriedade de que cada termo (começando com o terceiro) é igual à soma dos dois anteriores, então, independentemente dos dois números com os quais você tenha começado, desde que você avance suficientemente na seqüência, a razão de dois termos sucessivos sempre se aproxima da Razão Áurea.

Os números de Fibonacci, como a "aspiração" de suas razões — a Razão Áurea — têm algumas propriedades realmente assombrosas. A lista de relações matemáticas que envolveu os números de Fibonacci é literalmente sem fim. Aqui apresentamos apenas um punhado delas.

Retângulos "ao quadrado"

Se você soma um número ímpar de produtos de números de Fibonacci sucessivos (começando de 1×1, como os três produtos 1 × 1 + 1 × 2 + 2 × 3, então a soma (1 + 2 + 6 = 9) é igual ao quadrado do último número de Fibonacci que você usou nos produtos (neste caso, $3^2 = 9$). Para dar outro exemplo, se somarmos sete produtos, 1 × 1 + 1 × 2 + 2 × 3 + 3 × 5 + 5 × 8 + 8 × 13 + 13 × 21 = 441, a soma (441) será igual ao quadrado do último número usado ($21^2 = 441$). Do mesmo modo, somando os onze produtos $1 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 8 + 8 \times 13 + 13 \times 21 + 21 \times 34 + 34 \times 55 + 55 \times 89 + 89 \times 144 = 144^2$. Esta propriedade pode ser representada de forma admirável por meio de uma figura (Figura 30). Qualquer número ímpar de retângulos com lados iguais a números sucessivos de Fibonacci se

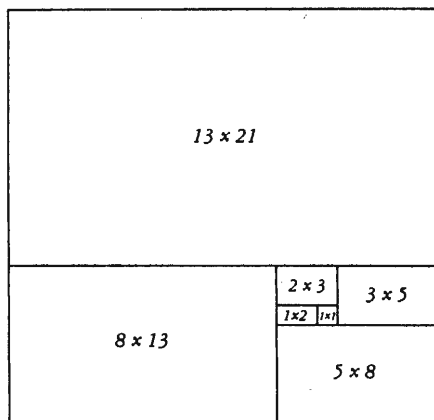


Figura 30

encaixa precisamente em um quadrado. A figura mostra um exemplo com sete desses retângulos.

Onze é o pecado

No drama *O Piccolomini*, do dramaturgo e poeta alemão Friedrich Schiller, o astrólogo Seni diz: "Elf ist die Sünde. Elfe überschreiten die zehn Gebote" ("Onze é o pecado. Onze transgride os Dez Mandamentos"), expressando uma opinião que data da época medieval. A seqüência de Fibonacci, por outro lado, tem uma propriedade relacionada ao número 11, que, longe de ser pecaminosa, é muito bonita.

Suponha que somemos os dez primeiros números consecutivos de Fibonacci 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 143. Esta soma é divisível por 11 (143/11 = 13). O mesmo é verdade para *qualquer* soma de dez números consecutivos de Fibonacci. Por exemplo, 55 + 89 + 144 + 233 + 377 + 610 + 987 + 1.597 + 2.584 + 4.181 = 10.857, e 10.857 é divisível por 11, 10.857/11 = 987. Se você examinar estes dois exemplos, descobrirá mais alguma coisa. A soma de dez números consecutivos é sempre igual a 11 vezes o sétimo número. Você pode usar esta propriedade para assombrar uma platéia pela velocidade com que pode somar quaisquer dez números sucessivos de Fibonacci.

Vingança do sexagesimal?

Como você se lembra, por motivos que não são inteiramente claros, os antigos babilônios usavam a base 60 (a base sexagesimal) no seu sistema de contagem. Embora não relacionado com o sistema numérico babilônico, o número 60 tem, por acaso, um papel importante na seqüência de Fibonacci.

Os números de Fibonacci se tornam grandes rapidamente, porque sempre se somam dois números sucessivos para formar o seguinte. De fato, temos muita sorte pelo fato de os coelhos não viverem para sempre, ou seríamos inundados por eles. Enquanto o quinto número de Fibonacci é somente 5, o 125º já é 59.425.114.757.512.643.212.875.125. É interessante notar que o dígito da unidade aparece com uma periodicidade de 60 (isto é, a cada 60 números). Por exemplo, o segundo número é 1, o sexagésimo segundo é 4.052.739.537.881 (também terminado em 1), e o 122° número, 14.028.366.653.498.915.298.923.761, também termina em 1; o mesmo vale para o 182º, e assim por diante. Do mesmo modo, o décimo quarto número é 377. O septuagésimo quarto (sessenta números à frente na seqüência), 1.304.969.544.928.657, também termina em 7, e assim por diante. Esta propriedade foi descoberta em 1774 pelo matemático francês nascido na Itália Joseph Louis Lagrange (1736-1813), que é responsável por muitos trabalhos em Teoria dos Números e em Mecânica, e que também estudou a estabilidade do sistema solar. Os últimos dois dígitos (por exemplo, 01, 01, 02, 03, 05, 08, 13, 21,...) se repetem na seqüência com uma periodicidade de 300 e os três últimos, com uma periodicidade de 1.500. Em 1963, Stephen P. Geller usou um computador IBM 1620 para mostrar que os últimos quatro dígitos se repetem a cada 15 mil vezes, os últimos cinco, a cada 150 mil vezes, e finalmente, após o computador rodar por quase três horas, uma repetição dos últimos seis dígitos ocorreu no 1.500.000 número de Fibonacci. Sabendo que um teorema geral referente à periodicidade dos últimos dígitos poderia ser provado, Geller comentou: "Não parece existir ainda um modo de adivinhar o período seguinte, mas talvez um novo programa para a máquina que permita a inicialização em qualquer ponto da seqüência para um teste irá reduzir o tempo de computação o suficiente para que mais dados possam ser coletados." Mas pouco tempo depois, o matemático israelense Dov Jarden mostrou que se pode provar rigorosamente que para qualquer número com últimos dígitos acima de três, a periodicidade é simplesmente quinze vezes dez elevado à potência que é um a menos que o número de dígitos (por exemplo, para sete dígitos é 15×10^6, ou 15 milhões).

Por que $^1/_{89}$?

As propriedades do nosso universo, do tamanho dos átomos ao tamanho das galáxias, são determinadas pelos valores de alguns números conhecidos como constantes da natureza. Essas constantes incluem uma medida da intensidade de todas as forças básicas — a gravitacional, a eletromagnética e as duas forças nucleares. A intensidade da conhecida força eletromagnética entre dois elétrons, por exemplo, é expressa em Física em termos de uma constante conhecida como a constante da estrutura fina. O valor dessa constante, quase exatamente $^1/_{137}$, intrigou muitas gerações de físicos. Uma piada sobre o famoso físico inglês Paul Dirac (1902-1984), um dos fundadores da mecânica quântica, diz que ao chegar ao céu, foi-lhe permitido fazer uma pergunta a Deus. Sua pergunta era: "Por que $^1/_{137}$?".

A seqüência de Fibonacci também contém um número absolutamente notável — o décimo primeiro número, 89. O valor de $^1/_{89}$ na representação decimal é igual a 0,01123595... Suponha que você organize os números de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,... como frações decimais da seguinte maneira:

0,01
0,001
0,0002
0,00003
0,000005
0,0000008
0,00000013
0,000000021
...

Em outras palavras, o dígito das unidades do primeiro número de Fibonacci está na segunda casa decimal, o do segundo está na terceira casa decimal, e assim por diante (o dígito das unidades do *n*-ésimo número de Fibonacci

está na (n + 1)-ésima casa decimal). Agora some todos os números. Iríamos obter 0,01123595..., que é igual a $^1/_{89}$.

Truque da soma relâmpago

Algumas pessoas conseguem somar números mentalmente de forma bastante rápida. A seqüência de Fibonacci permite que se faça essa soma relâmpago sem muito esforço. A soma de todos os números de Fibonacci do primeiro ao n-ésimo é simplesmente igual ao (n + 2)-ésimo número menos 1. Por exemplo, a soma dos primeiros dez números, 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 143, é igual ao décimo segundo número (144) menos 1. A soma dos primeiros setenta e oito números é igual ao octagésimo número menos 1, e assim por diante. Portanto, você pode pedir a alguém para escrever uma longa coluna de números começando com 1, 1, e continuar usando a definição da seqüência de Fibonacci (em que cada número será a soma dos dois anteriores). Peça a essa pessoa para riscar uma linha entre dois números aleatórios na coluna e você será capaz, de relance, de dizer a soma de todos os números anteriores à linha. Essa soma será igual ao segundo termo após a linha menos um.

Fibonacci pitagórico

Pode parecer estranho, mas números de Fibonacci podem ser relacionados até às triplas pitagóricas. Estas últimas, como você se recorda, são triplas de números que podem servir como comprimentos dos lados de um triângulo retângulo (como os números 3, 4, e 5). Tome quaisquer quatro números consecutivos de Fibonacci, como 1, 2, 3, 5. O produto dos números de fora, 1 × 5 = 5, duas vezes o produto dos números de dentro, 2 × 2 × 3 = 12, e a soma dos quadrados dos termos de dentro, $2^2 + 3^2 = 13$, formam as três pernas da tripla pitagórica 5, 12, 13 ($5^2 + 12^2 = 13^2$). Mas isto não é tudo. Note que o terceiro número, 13, é, ele próprio, um número de Fibonacci. Esta propriedade foi descoberta pelo matemático Charles Raine. Devido às muitas maravilhas dos números de Fibonacci já observadas (encontraremos

outras em breve), não deveria surpreender o fato de que os matemáticos procurem métodos eficientes para calcular esses números, F_n, para qualquer valor de n. Embora, em princípio, isto não seja um problema, já que, se desejamos o centésimo número precisamos simplesmente somar o 98° e o 99°, isto ainda significa que primeiro temos que encontrar todos os números até o 99°, o que pode ser bastante tedioso. Como o falecido comediante George Burns (no seu livro *Como viver até os 100 ou mais*) disse certa vez: "Como você vive 100 anos ou mais? Há certas coisas que você precisa fazer. A mais importante é você garantir que consegue chegar aos 99."

Em meados do século XIX, o matemático francês Jacques Phillipe Marie Binet (1786-1856) redescobriu uma fórmula que, aparentemente, era conhecida no século XVIII pelo mais prolífico matemático da história, Leonard Euler (1707-1783), e pelo matemático francês Abraham de Moivre (1667-1754). A fórmula permite que se encontre o valor de qualquer número de Fibonacci, F_n, se seu lugar na seqüência, n, for conhecido. A fórmula de Binet se apóia inteiramente na Razão Áurea

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

À primeira vista, esta é uma fórmula extremamente desconcertante, já que não é sequer óbvio que após a substituição dos vários valores de n ela produziria números inteiros (como são todos os termos na seqüência de Fibonacci). Como já sabemos que os números de Fibonacci estão intimamente ligados à Razão Áurea, as coisas começam a parecer um pouco mais tranqüilizadoras quando percebemos que o primeiro termo entre os colchetes é de fato simplesmente a Razão Áurea elevado à n-ésima potência Φ^n, e o segundo é $(-1/\Phi)^n$. (Lembre-se de que, como vimos antes, a solução negativa da equação quadrática definindo Φ é igual a $-1/\Phi$.) Usando uma simples calculadora científica de bolso, você pode testar alguns valores de n que a fórmula de Binet de fato dá os números de Fibonacci corretamente.

Para valores relativamente grandes de n, o segundo termo nos colchetes acima se torna bem pequeno e você pode simplesmente tomar F_n como sendo o número inteiro mais próximo de $\frac{\Phi^n}{\sqrt{5}}$. Por exemplo, para $n = 10$, $\frac{\Phi^n}{\sqrt{5}}$ é igual a 55,0036, e o décimo número de Fibonacci é igual a 55.

Apenas como divertimento, você pode se perguntar se existe um número de Fibonacci com exatamente 666 dígitos. O matemático e escritor Clifford A. Pickover chama os números associados ao 666 de "apocalípticos". Ele descobriu que o 3.184° número de Fibonacci tem 666 dígitos.

Depois de descobertos, os números de Fibonacci parecem começar a surgir em todo lugar na natureza. Alguns exemplos fascinantes são fornecidos pela botânica.

QUANDO O GIRASSOL SE VOLTA PARA SEU DEUS

As folhas ao longo do galho de uma planta ou os talos ao longo de um ramo tendem a crescer em posições que otimizariam sua exposição ao sol, à chuva e ao ar. À medida que um talo vertical cresce, ele produz folhas em pontos com espaçamento bem regular. No entanto, as folhas não crescem diretamente uma sobre a outra, pois isso iria impedir que as folhas de baixo recebessem a umidade e a luz do Sol de que elas necessitam. Em vez disso, a passagem de uma folha para a seguinte (ou de um talo para o seguinte ao longo dos ramos) é caracterizada por espaçamentos do tipo parafuso em volta do ramo (como na Figura 31). Arranjos semelhantes de unidades que se repetem podem ser encontrados nas camadas de uma pinha ou nas sementes de um girassol. Este fenômeno é chamado de *phyllotaxis* ("arranjo de folhas", em grego), uma palavra cunhada em 1754 pelo naturalista suíço Charles Bonnet (1720-1793). Por exemplo, nas tílias americanas, as folhas aparecem geralmente em dois lados opostos (correspondendo a metade de uma volta em torno dos ramos), o que é conhecido como razão filotáxica $^1/_2$. Em outras plantas, como a aveleira, a amoreira e a faia, a passagem de uma folha

para a seguinte envolve um terço de uma volta (razão filotáxica $^1/_3$). De modo semelhante, a macieira, o carvalho e o damasqueiro têm folhas a cada $^2/_5$ de uma volta, e a pereira e o salgueiro-chorão têm folhas a cada $^3/_8$ de uma volta. A Figura 31 ilustra um caso em que são necessárias três voltas completas para passar por oito ramos (razão filotáxica $^3/_8$). Você notará que todas as frações que são observadas são razões de membros alternados da seqüência de Fibonacci.

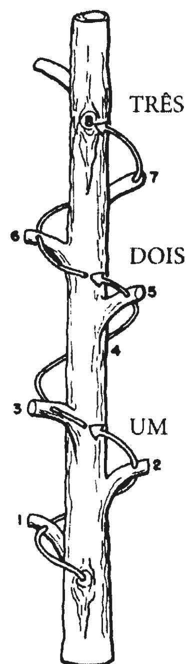


Figura 31

O fato de que as folhas das plantas seguem certos padrões foi observado pela primeira vez na Antiguidade por Teofrasto (372 a.C.–287 a.C.) em *Investigação sobre plantas*. Ele comenta: "aquelas que têm folhas planas as têm em séries regulares". Plínio, o Velho (23-79 d.C.), fez uma observação semelhante em sua monumental *História Natural*, em que fala de "intervalos regulares" entre folhas "arrumadas de forma circular em volta dos ramos". O estudo da filotaxia não foi muito além dessas observações iniciais e qualitativas até o século XV, quando Leonardo da Vinci (1452-1519) acrescentou um elemento quantitativo à descrição de arranjos de folhas ao notar que estas se distribuíam em padrões espirais, com ciclos de cinco (correspondendo a um ângulo de $^2/_5$ por volta). A primeira pessoa a descobrir (intuitivamente) a relação entre filotaxia e os números de Fibonacci foi o astrônomo Johannes Kepler. Escreveu Kepler: "É na similaridade dessa série autodeterminada [referindo-se à propriedade recursiva da seqüência de Fibonacci] que a faculdade da propagação, na minha opinião, é formada. E assim, numa flor, a autêntica bandeira dessa faculdade é exibida, o pentágono".

Charles Bonnet iniciou estudos sérios de filotaxia observacional. Em seu livro *Recherches sur l'Usage des Feuilles dans les Plantes* (Pesquisa sobre a função das folhas em plantas), de 1754, ele dá uma descrição clara da filotaxia $^2/_5$. Enquanto trabalhava com o matemático G. L. Calandrini, Bonnet pode

ter descoberto também que conjuntos de linhas espirais (conhecidos como *parastichies*) aparecem em algumas plantas, como nas camadas de uma pinha ou de um abacaxi.

A história da filotaxia verdadeiramente *matemática* (em vez de puramente descritiva) começa no século XIX com os trabalhos do botânico Karl Friedric Schimper (publicado em 1830), de seu amigo Alexander Braun (publicado em 1835) e do cristalógrafo Auguste Bravais e seu irmão botânico Louis (publicado em 1837). Estes pesquisadores descobriram a regra geral de que os quocientes filotáxicos poderiam ser expressos por razões de termos da série de Fibonacci (como $^2/_5$ e $^3/_8$) e também notaram a aparição de números de Fibonacci consecutivos nos *parastichies* de pinhas e abacaxis.

Os abacaxis de fato fornecem uma manifestação verdadeiramente bela de filotaxia baseada em Fibonacci (Figura 32). Cada camada hexagonal na superfície de um abacaxi é parte de três espirais diferentes. Na figura você pode ver uma de oito linhas paralelas subindo suavemente da esquerda inferior para a direita superior, uma das treze linhas paralelas que sobem de forma mais inclinada da direita inferior até a esquerda superior, e uma das vinte e uma linhas paralelas que são bastante inclinadas (da esquerda inferior até a direita superior). A maioria dos abacaxis tem cinco, oito, treze ou vinte e uma espirais de inclinação crescente na sua superfície. Todos esses são números de Fibonacci.

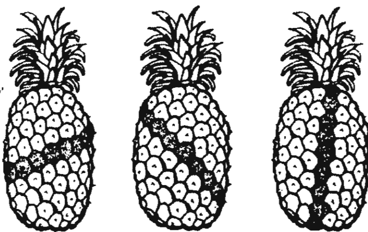


Figura 32

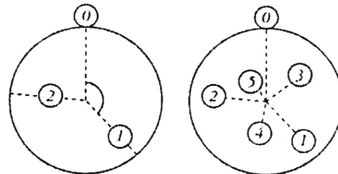


Figura 33

Como as plantas sabem arrumar suas folhas nesses padrões de Fibonacci? O crescimento das plantas ocorre na ponta do caule (chamada de meristema), que tem um formato tipicamente cônico (sendo mais fino na ponta). As folhas que estão mais abaixo (ou seja, as que cresceram antes) tendem a se localizar radialmente mais afastadas do centro do tronco quando visto de cima (já que o tronco é mais grosso nesse ponto). A Figura 33 mostra uma visão de cima do tronco, onde as folhas estão numeradas de acordo com a ordem em que aparecem. A folha de número 0, que apareceu primeiro, é a mais afastada do meristema e do centro do tronco. O botânico A. H. Church, no livro *On the Relation of Phyllotaxis to Mechanical Laws* (Sobre a relação entre a filotaxia e as leis da mecânica), foi o primeiro a enfatizar a importância desse tipo de representação para a compreensão da filotaxia. O que vemos (imaginando uma curva que liga as folhas de 0 a 5 na Figura 33) é que folhas sucessivas se encontram ao longo de uma espiral firmemente enrolada, conhecida como espiral generativa. A quantidade importante que caracteriza a localização das folhas é o ângulo entre as linhas que ligam o centro do caule às folhas sucessivas. Uma das descobertas dos irmãos Bravais, em 1837, foi que novas folhas avançam mais ou menos no mesmo ângulo em volta do círculo, e que este ângulo (conhecido como o ângulo de divergência) em geral é próximo de 137,5 graus. Você ficaria chocado ao saber que esse valor é determinado pela Razão Áurea? O ângulo que divide uma volta completa numa Razão Áurea é $360^o/\Phi = 222,5$ graus. Como isto é mais da metade de um círculo (180° graus), deveríamos medi-lo indo na direção contrária no círculo. Em outras palavras, deveríamos subtrair 222,5 de 360, o que resulta em um ângulo observado de 137,5 graus (às vezes chamado de Ângulo Áureo).

Num trabalho pioneiro em 1907, o matemático alemão G. van Iterson mostrou que, se considerarmos pontos sucessivos separados por 137,5 graus em espirais firmemente enroladas, nossa vista iria perceber uma família de padrões espirais girando no sentido horário e uma no anti-horário. Os números de espirais nas duas famílias tendem a ser números consecutivos de Fibonacci, pois a razão desses números se aproxima da Razão Áurea.

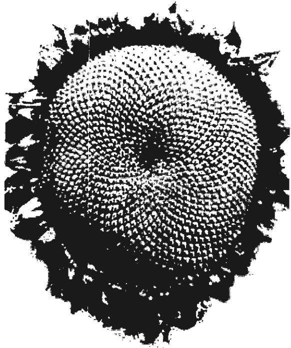


Figura 34

Uma exibição espetacular dessas espirais cruzadas é dada pelo arranjo dos flósculos nos girassóis. Quando você olha para um girassol (Figura 34), nota padrões espirais tanto horários quanto anti-horários formados pelos flósculos. É evidente que os flósculos crescem de modo a assegurar a mais eficiente divisão de espaço horizontal. A quantidade dessas espirais em geral depende do tamanho do girassol. O mais comum é que existam 34 espirais em um sentido e 55 no outro, mas girassóis com quocientes de números de espirais de 89/55, 144/89 e até de 233/144 (pelo menos um; relatado por um casal de Vermont à *Scientific American* em 1951) foram vistos. Todos esses valores são, obviamente, razões de números de Fibonacci adjacentes. Nos maiores girassóis, a estrutura se estica de um par de números de Fibonacci consecutivos para o seguinte maior, quando nos movemos do centro para a periferia.

A contagem e o arranjo de pétalas de algumas flores também apresentam números de Fibonacci e ligações com a Razão Áurea. Muitas pessoas já se valeram (pelo menos simbolicamente) em algum momento de suas vidas do número de pétalas de margaridas para satisfazer sua curiosidade sobre a seguinte pergunta: "Bem me quer, mal me quer?" A maioria das margaridas-do-campo tem treze, vinte e uma ou trinta e quatro pétalas, todos números de Fibonacci. (Não seria bom saber de antemão se a margarida tem um número par ou ímpar de pétalas?) O número de pétalas simplesmente reflete o número de espirais de uma família.

O belo arranjo simétrico das pétalas de rosas também se baseia na Razão Áurea. Se você dissecar uma rosa (pétala por pétala), irá observar a distribuição de suas pétalas compactamente unidas. A Figura 35 apresenta um esquema em que as pétalas estão numeradas. Os ângulos que definem as posições (em frações de uma volta completa) das pétalas são as partes fracionárias de múltiplos simples de Φ. A pétala 1 está a 0,618 (a parte

fracionária $1 \times \Phi$) de uma volta da pétala 0, a pétala 2, a 0,236 (a parte fracionária $2 \times \Phi$) de uma volta da pétala 1, e assim por diante.

Esta descrição mostra que o quebra-cabeça de 2.300 anos sobre a origem da filotaxia se reduz à pergunta básica: por que as folhas sucessivas são separadas pelo Ângulo Áureo de 137,5 graus? As tentativas de responder a esta pergunta vêm em duas linhas: teorias que se concentram na geometria da configuração e em regras matemáticas simples que podem gerar essa geometria; e modelos que sugerem uma causa verdadeiramente dinâmica para o comportamento observado. Trabalhos seminais do primeiro tipo (por exemplo, dos matemáticos Harold S. M. Coxeter e I. Adler e do cristalógrafo N. Rivier) mostram que botões de flor que são colocados ao longo da espiral generativa separados pelo Ângulo Áureo são distribuídos de forma mais eficiente. Isto é fácil de entender. Se o ângulo divergente fosse, digamos, de 120 graus (que é 360/3) ou qualquer outro múltiplo racional de 360 graus, então as folhas iriam se alinhar radialmente (ao longo de três linhas no caso de 120 graus), deixando grandes espaços no meio. Por outro lado, um ângulo divergente como o Ângulo Áureo (que é um múltiplo irracional de 360 graus) garante que os botões de flor não se alinhem ao longo de qualquer direção radial específica e encham o espaço de modo eficiente. O Ângulo Áureo prova que é ainda melhor que outros múltiplos irracionais de 360 graus porque a Razão Áurea é o mais irracional de todos os números irracionais no seguinte sentido. Lembre-se de que a Razão Áurea é igual a uma fração contínua composta inteiramente de uns. Essa fração contínua converge mais lentamente do que qualquer outra fração contínua. Em outras palavras, a Razão Áurea está mais longe de poder ser expressa como uma fração do que qualquer outro número irracional.

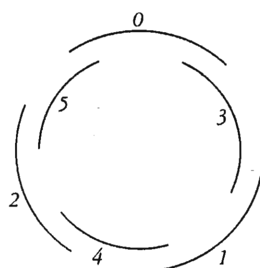


Figura 35

Em um artigo publicado em 1984 no *Journal de Physique*, um grupo de cientistas liderados por N. Rivier, da Université de Provence em Marselha, França, usou um algoritmo matemático simples para mostrar que quando é

usado um ângulo de crescimento igual ao Ângulo Áureo obtêm-se estruturas que se parecem com girassóis reais. (Veja Figura 36.) Rivier e seus colaboradores sugeriram que isso nos daria uma resposta à pergunta feita num trabalho clássico do biólogo *sir* D'Arcy Wentworth Thompson. Em seu monumental livro *On Growth and Form* (lançado em 1917 e revisado em 1942), Thompson se pergunta: "... e a não menos curiosa característica do caso [filotaxia] é o limitado, até mesmo pequeno, número de possíveis arranjos que observamos e reconhecemos." A equipe de Rivier descobriu que as exigências de *homogeneidade* (de que a estrutura seja a mesma em todo lugar) e de auto-similaridade (de que quando se examina a estrutura em diferentes escalas do pequeno ao grande, ela parece exatamente a mesma) limitam drasticamente a quantidade de estruturas possíveis. Essas duas propriedades podem ser suficientes para explicar a preponderância dos números de Fibonacci e da Razão Áurea em filotaxia, mas elas ainda não oferecem nenhuma justificativa física.

Os melhores indícios de uma possível causa dinâmica para a filotaxia vieram não da botânica, mas de experimentos em Física feitos por L. S. Levitov (em 1991) e por Stephane Douady e Yves Couder (de 1992 até 1996). O experimento de Douady e Couder é particularmente fascinante. Eles mantiveram um prato cheio de óleo de silicone em um campo magnético que era mais forte perto da borda do prato do que no centro. Gotas de um fluido magnético, que agem como minúsculos ímãs, eram pingadas periodicamente no centro do prato. Os pequenos ímãs se repeliram e foram empurrados radialmente pelo gradiente do campo magnético. Douady e Couder observaram padrões que oscilavam e em geral convergiam para uma espiral em que o Ângulo Áureo separava as gotas sucessivas. Sistemas físicos geralmente se acomodam em estados que minimizam a energia. Portanto, a evidência

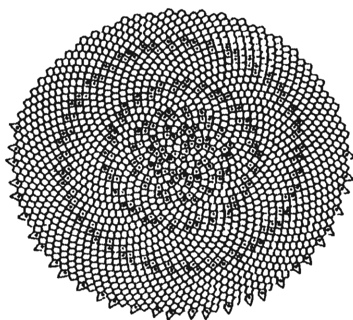


Figura 36

é de que a filotaxia simplesmente representa um estado de mínima energia para um sistema de botões de flor que se repelem mutuamente. Outros modelos, em que folhas aparecem nos pontos de maior concentração de nutriente, também tendem a produzir separações iguais ao Ângulo Áureo.

Espero que da próxima vez que comer um abacaxi, mandar uma rosa para a pessoa amada ou admirar as pinturas de girassóis de Van Gogh, você se lembre que o padrão de crescimento dessas plantas incorpora esse número admirável que chamamos de Razão Áurea. Mas note que o crescimento da planta também depende de outros fatores além do espaçamento ideal. Conseqüentemente, as regras de filotaxia que descrevi não podem ser vistas como algo que se aplica a todas as circunstâncias, como uma lei da natureza. Em vez disso, nas palavras do famoso matemático canadense Coxeter, elas são "apenas uma *tendência* fascinantemente predominante."

A botânica não é a única área da natureza em que a Razão Áurea e os números de Fibonacci podem ser encontrados. Eles aparecem em fenômenos que abrangem uma série de tamanhos que vão do microscópico ao das galáxias gigantes. Freqüentemente, essas manifestações assumem a forma de uma magnífica espiral.

EMBORA MUDADO, RESSURJO O MESMO

Nenhuma família na história da matemática produziu tantos matemáticos célebres (treze no total!) quanto a família Bernoulli. Perturbada pela Fúria Espanhola (tumulto saqueador na Holanda feito por soldados espanhóis), a família fugiu para a Basiléia, na Suíça, dos católicos dos Países Baixos espanhóis. Três membros da família, os irmãos Jacques (1654-1705) e Jean (1667-1748), e o segundo filho deste último, Daniel (1700-1782), destacaram-se bastante dos demais. Curiosamente, os Bernoulli eram quase tão famosos por suas rivalidades e seus rancores familiares quanto por suas numerosas realizações matemáticas. Em um caso, as interações entre Jacques e Jean se tornaram particularmente problemáticas. A rixa pegou fogo com

uma discussão a respeito da solução de um famoso problema de Mecânica. O problema, conhecido como a braquistócrona (do grego *brachistos*, "mais curto", e *chronos*, "tempo"), consistia em achar a curva ao longo da qual uma partícula sujeita à força da gravidade passaria no menor tempo de um ponto a outro. Os dois irmãos propuseram a mesma solução de modo independente, mas a derivação de Jean estava incorreta e ele tentou mais tarde apresentar a derivação de Jacques como sua. A triste conseqüência desta série de acontecimentos foi que Jean se tornou professor em Groningen e não pôs os pés na Basiléia até a morte de seu irmão.

A associação de Jacques Bernoulli com a Razão Áurea vem por meio de outra curva famosa. Ele dedicou um tratado intitulado *Spira Mirabilis* (Espiral Maravilhosa) a um tipo particular de forma espiral. Jacques ficou tão impressionado com a beleza da curva conhecida como espiral logarítmica (Figura 37; o nome foi derivado da forma como o raio cresce quando nos movemos ao longo da curva no sentido horário) que ele pediu que essa forma e o lema que atribuiu a ela — "*Eadem mutato resurgo*" (embora mudado, ressurjo o mesmo) — fossem gravados em seu túmulo.

O lema descreve uma propriedade fundamental exclusiva da espiral logarítmica — ela não altera seu formato à medida que seu tamanho aumenta. Esta característica é conhecida como auto-similaridade. Fascinado com essa propriedade, Jacques escreveu que a espiral logarítmica "pode ser usada como um símbolo tanto de vigor e constância na adversidade quanto do corpo humano, o qual, após todas as mudanças, até mesmo após a morte, será restaurado ao seu exato e perfeito ser."

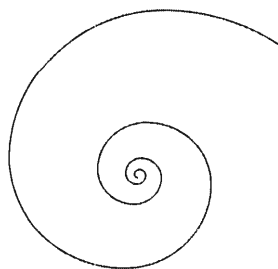


Figura 37

Se você pensar a respeito por um momento, esta é exatamente a propriedade exigida por muitos fenômenos de crescimento na natureza. Por exemplo, à medida que o molusco cresce dentro da concha do náutilo (Figura 4), ele constrói câmaras cada vez maiores, fechando as menores, que não são mais usadas. Cada aumento no compri-

mento da concha é acompanhado de um crescimento proporcional no raio, de modo que a forma permanece inalterada. Conseqüentemente, o náutilo vê uma "casa" idêntica durante toda a vida, e não precisa, por exemplo, ajustar seu equilíbrio à medida que amadurece. Esta última propriedade se aplica igualmente a carneiros, cujos chifres também têm um formato de espiral logarítmica (embora não no plano), e à curva das presas dos elefantes. Aumentando pela acumulação dentro de si mesma, a espiral logarítmica cresce cada vez mais, com a distância entre seus "enrolamentos" aumentando à medida que se afasta da fonte, conhecida como pólo. Especificamente, dar voltas de ângulos iguais aumenta a distância do pólo em proporções iguais. Se ampliássemos, com a ajuda de um microscópio, os enrolamentos que são invisíveis a olho nu até o tamanho da Figura 37, eles iriam se ajustar exatamente na espiral maior. Esta propriedade distingue a espiral logarítmica de outra espiral comum chamada de espiral arquimediana, em homenagem ao famoso matemático grego Arquimedes (c. 287-212 a.C.), que a descreveu longamente no seu livro *Sobre espirais*. Podemos ver uma espiral arquimediana no rolo de papel-toalha de perfil ou em uma corda enrolada no chão. Neste tipo de espiral, a distância entre os sucessivos enrolamentos permanece sempre a mesma. Em conseqüência de um erro que certamente causaria muito pesar a Jacques Bernoulli, o pedreiro que preparou o túmulo de Bernoulli gravou nela uma espiral arquimediana em vez da logarítmica.

A natureza ama espirais logarítmicas. De girassóis, conchas do mar e redemoinhos a furacões e galáxias espirais gigantes, parece que a natureza escolheu esta forma magnífica como seu "ornamento" favorito. O formato constante da espiral logarítmica em todas as escalas de tamanho se revela com beleza na natureza na forma de minúsculos fósseis ou de organismos unicelulares conhecidos como foraminíferas. Embora as conchas espirais neste caso sejam compostas (e não um tubo contínuo), imagens de raios X da estrutura interna desses fósseis mostram que o formato da espiral logarítmica permaneceu inalterado por milhões de anos.

Em seu clássico livro *As curvas da vida* (1914), o escritor e editor inglês Theodore Andrea Cook dá numerosos exemplos do surgimento de espirais

(não apenas logarítmicas) na natureza e na arte. Ele analisa espirais em coisas tão diversas quanto plantas trepadeiras, o corpo humano, escadas e tatuagens dos Maori. Explicando sua motivação para escrever o livro, Cook escreve: "para a existência desses capítulos sobre formações espirais nenhuma desculpa é necessária além do interesse e da beleza de uma investigação".

Artistas também não deixaram de ver a beleza das espirais logarítmicas. No estudo de Leonardo da Vinci sobre o tema mitológico "Leda e o cisne", por exemplo, ele desenha o cabelo arrumado num formato quase igual à espiral logarítmica (Figura 38). Leonardo repete essa forma muitas vezes em seu estudo de espirais em nuvens e em água na impressionante série de esboços para o "Dilúvio". Nessa obra, ele combinou suas observações científicas de inundações apavorantes com os aspectos alegóricos das forças destrutivas comandadas pelo céu. Descrevendo o fluxo violento de água, Leonardo escreveu: "As águas repentinas correm até a lagoa que as retém, esmagando vários obstáculos com seus redemoinhos... O *momentum* das ondas circulares voando do ponto de impacto as arremessa na direção de outras ondas circulares que se movem na direção contrária".



Figura 38

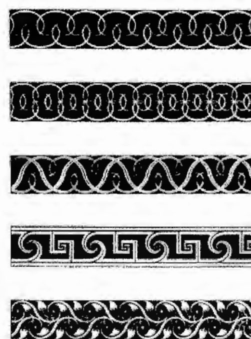


Figura 39

O ilustrador e *designer* Edward B. Edwards, do século XX, desenvolveu centenas de desenhos decorativos baseados na espiral logarítmica. Muitos

deles podem ser vistos no seu livro *Pattern and Design with Dynamic Symmetry* (Padrão e desenho com simetria dinâmica; um exemplo é mostrado na Figura 39).

A espiral logarítmica e a Razão Áurea caminham de mãos dadas. Examine de novo a série de Retângulos Áureos aninhados obtidos quando removemos quadrados de um Retângulo Áureo (Figura 40; já encontramos essa propriedade no Capítulo 4). Se você ligar os pontos sucessivos onde esses "quadrados rodopiantes" dividem os lados em Razões Áureas, obterá uma espiral logarítmica que se enrola para o interior na direção do pólo (o ponto dado pela interseção das diagonais na Figura 25, que foi chamado caprichosamente de "o olho de Deus").

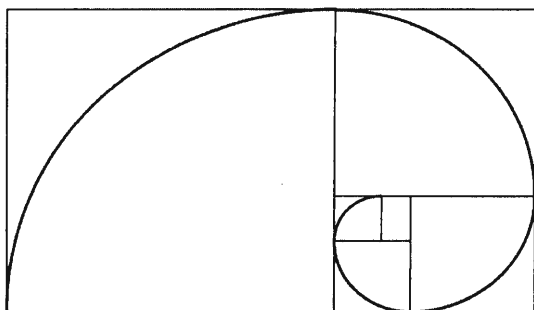


Figura 40

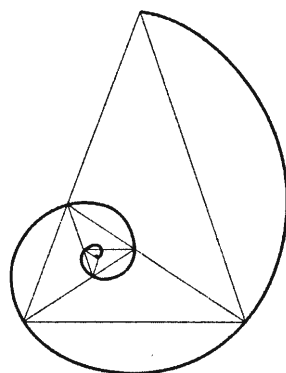


Figura 41

Você também pode obter uma espiral logarítmica a partir de um Triângulo Áureo. Vimos no Capítulo 4 que, começando de um Triângulo Áureo (um triângulo isósceles no qual o lado está numa Razão Áurea em relação à base) e bissectando um ângulo da base, obtemos um Triângulo Áureo menor. Continuando o processo de bissectar o ângulo da base *ad infinitum*, iremos gerar uma série de triângulos rodopiantes. Ligando os vértices de um Triângulo Áureo progressivamente, obteremos uma espiral logarítmica (Figura 41).

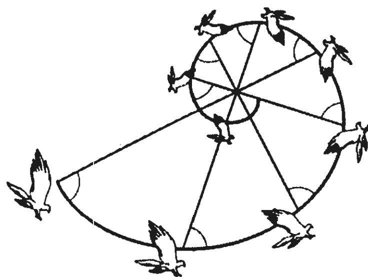


Figura 42

A espiral logarítmica também é conhecida como a espiral eqüiangular. Esse nome foi cunhado em 1638 pelo matemático e filósofo francês René Descartes (1596-1650), em cuja homenagem batizamos os números usados para localizar um ponto no plano (com respeito aos dois eixos) — coordenadas cartesianas. O nome "eqüiangular" reflete outra propriedade única da espiral logarítmica. Se desenharmos uma linha reta do pólo até qualquer ponto da curva, ela cortará a curva formando exatamente o mesmo ângulo (Figura 42). Os falcões usam essa propriedade quando atacam suas presas. Os falcões-peregrinos estão entre as aves mais rápidas da Terra, mergulhando sobre o alvo a velocidades de até 320 quilômetros por hora. Mas eles poderiam voar ainda mais depressa se o fizessem em linha reta em vez de seguir uma trajetória espiral até suas vítimas. O biólogo Vance A. Tucker da Universidade de Duke, na Carolina do Norte, EUA, passou anos se perguntando por que os peregrinos não usavam a distância mais curta até a presa. Então ele percebeu que, como os olhos dos falcões ficam nas leterais de suas cabeças, para tirar vantagem de sua visão extremamente aguçada, eles precisavam inclinar a cabeça 40 graus para um lado ou para outro. Tucker descobriu em experiências num túnel de vento que essa inclinação de cabeça os deixava muito mais lentos. Os resultados de sua pesquisa, que foram publicados na edição de novembro de 2000 do *Journal of Experimental Biology*, mostram que os falcões mantêm a cabeça em linha reta e seguem uma espiral logarítmica. Devido à propriedade eqüiangular da espiral, esse caminho lhes permite manter seu alvo à vista enquanto maximiza a velocidade.

O fascinante é que a mesma forma espiral encontrada na foraminífera unicelular e no girassol e que orienta o vôo de um falcão também é observada nos "sistemas de estrelas agrupadas em um plano comum, como as da Via Láctea" a respeito dos quais o filósofo Immanuel Kant (1724-1804) es-

peculou muito antes que fossem de fato observados (Figura 43). Eles ficaram conhecidos como universos-ilhas — galáxias gigantes contendo centenas de bilhões de estrelas como o nosso Sol. Observações feitas com o telescópio espacial Hubble revelaram que há cerca de cem bilhões de galáxias em nosso universo observável, muitas das quais são galáxias espirais. É difícil conceber uma manifestação melhor da visão grandiosa expressa pelo poeta, pintor e místico inglês William Blake (1757-1827) quando escreveu:

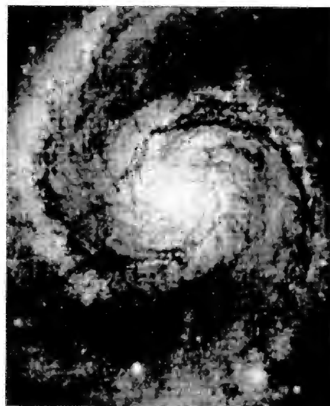


Figura 43

Para ver um Mundo em um Grão de Areia,
E um Céu em uma Flor Selvagem,
Pegue o Infinito na Palma de sua mão,
E a Eternidade em uma hora.

Por que tantas galáxias exibem um padrão espiral? Galáxias espirais como nossa própria Via Láctea têm um disco relativamente fino (como uma panqueca) composto de gás, pó (grãos miniaturas) e estrelas. O disco galáctico inteiro gira em torno de seu centro. Na vizinhança do Sol, por exemplo, a velocidade orbital ao redor do centro da Via Láctea é de aproximadamente 225 quilômetros por segundo, e leva cerca de 225 milhões de anos para completar uma revolução. A outras distâncias do centro, a velocidade é diferente — maior perto do centro, menor a distâncias maiores — isto é, discos galácticos não giram como um sólido compacto, giram com velocidades distintas. Vistas de frente, galáxias espirais mostram braços espirais que começam perto do centro da galáxia e se estendem para fora por quase todo o disco (como na "Galáxia Redemoinho", Figura 43). Os braços espirais constituem a parte do disco galáctico em que muitas estrelas jovens nasceram. Como as estrelas jovens são mais brilhantes, pode-

mos ver a estrutura espiral de outras galáxias afastadas. A pergunta básica que os astrofísicos precisam responder é: como os braços espirais conservam sua forma por longos períodos de tempo? Como as partes internas do disco giram mais depressa do que as partes externas, qualquer padrão em grande escala que seja de alguma maneira "ligado" ao material do disco (por exemplo, as estrelas) não pode sobreviver por muito tempo. Uma estrutura espiral sempre atada à mesma coleção de estrelas e nuvens de gás iria inevitavelmente se enrolar, contrariamente às observações. A explicação para a longevidade dos braços espirais se baseia nas *ondas de densidade* — ondas de compressão de gás varrendo o disco galáctico — comprimindo nuvens de gás ao longo do caminho e iniciando a formação de novas estrelas. O padrão espiral que observamos simplesmente marca as partes mais densas que a média do disco e suas estrelas recém-nascidas. O padrão, portanto é criado repetidamente sem se enrolar. A situação é semelhante ao que é observado perto de uma pista fechada para consertos por um grupo de trabalhadores em uma grande rodovia. O acúmulo de carros na vizinhança do trecho fechado é maior porque os carros têm de diminuir a velocidade ali. Se você tira uma foto de longa exposição da rodovia de cima, irá registrar a densidade de alto tráfego perto do lugar onde os consertos estão sendo feitos. Assim como a onda de densidade de tráfego não está associada a qualquer conjunto específico de carros, o padrão de braços espirais não está ligado a qualquer tipo de material do disco. Outra similaridade está no fato de que a onda de densidade se move através do disco mais lentamente do que o movimento das estrelas e do gás, tal como a velocidade no trecho do conserto da rodovia é naturalmente muito menor que a velocidade não perturbada dos carros individuais.

O agente que desvia o movimento das estrelas e das nuvens de gás e gera a espiral de onda de densidade (semelhante aos trabalhadores que desviam os carros em movimento para menos faixas) é a força gravitacional resultante do fato de que a distribuição de matéria na galáxia não é perfeitamente simétrica. Por exemplo, um conjunto de órbitas ovais ao redor do centro (Figura 44a), em que cada órbita é perturbada (rodada) ligeiramente por

uma quantidade que muda com a distância do centro, resulta num padrão espiral (Figura 44b).

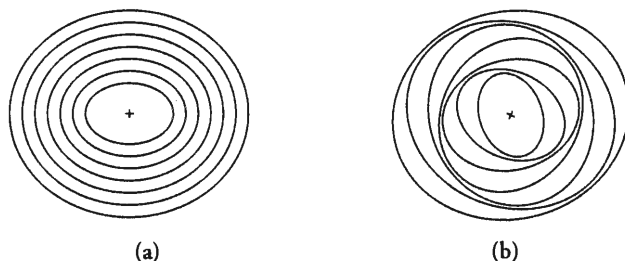


Figura 44

Na verdade, deveríamos estar felizes pelo fato de a força da gravidade se comportar em nosso universo do modo como se comporta. Segundo a lei da gravidade universal de Newton, cada massa atrai outra massa, e a força de atração diminui à medida que as massas se afastam. Em particular, dobrar a distância reduz a força por um fator de quatro (a força decresce como o inverso do quadrado da distância). As leis do movimento de Newton mostram que, como resultado dessa dependência em relação à distância, as órbitas dos planetas ao redor do Sol têm a forma de elipses. Imagine o que aconteceria se vivêssemos num universo em que a gravidade decrescesse por um fator de oito (em vez de quatro) ao se dobrar a distância (a força decresceria como o inverso do cubo da distância). Num universo assim, as leis de Newton prevêem que uma possível órbita dos planetas é a espiral logarítmica. Em outras palavras, a Terra teria se espiralado para o Sol ou escapado para o espaço.

Leonardo Fibonacci, que iniciou todo esse frenesi de atividade matemática, está longe de se encontrar esquecido hoje. Na Pisa atual, há uma estátua de Fibonacci, construída no século XIX, no Jardim Scotto, nas terras da Fortaleza Sangallo, perto de uma rua chamada Fibonacci, que corre ao longo do lado sul do rio Arno.

Desde 1963, a Associação Fibonacci publica um periódico chamado

Fibonacci Quarterly. O grupo foi formado pelos matemáticos Verner Emil Hoggatt (1921-1981) e irmão Alfred Brousseau (1907-1988) "a fim de trocar idéias e estimular a pesquisa sobre os números de Fibonacci e temas relacionados". Talvez contra as expectativas, o *Fibonacci Quarterly* cresceu desde então e se tornou um periódico bastante respeitado em Teoria dos Números. Como o irmão Brousseau diz, bem-humorado: "Juntamos um grupo de pessoas em 1963, e, como um monte de malucos, começamos uma revista de matemática". A Décima Conferência Internacional sobre Números de Fibonacci e Suas Aplicações foi planejada para o período de 24 a 28 de junho de 2002, na Universidade do Arizona do Norte, em Flagstaff, Arizona.

Tudo isto é apenas um pequeno tributo ao homem que usou coelhos para descobrir um conceito matemático que engloba o mundo. Ainda que a contribuição de Fibonacci tenha sido tão importante, a história da Razão Áurea não terminou no século XIII. Desenvolvimentos fascinantes ainda estavam por vir na Europa Renascentista.

6

A PROPORÇÃO DIVINA

A busca pelas nossas origens é aquele doce suco de fruta que mantém a satisfação nas mentes dos filósofos.

— LUCA PACIOLI (1445-1517)

Alguns pintores famosos da história também foram matemáticos talentosos. Porém, quando falamos de um "homem do Renascimento", queremos nos referir a uma pessoa que exemplifica o ideal Renascentista de vasta cultura e conhecimento. Por conseguinte, três dos mais conhecidos pintores renascentistas, os italianos Piero della Francesca (c. 1412-1492), Leonardo da Vinci e o alemão Albrecht Dürer também deram contribuições interessantes à matemática. Talvez não surpreenda o fato de que as investigações matemáticas dos três pintores estavam relacionadas à Razão Áurea.

O matemático mais ativo deste trio ilustre foi Piero della Francesca. Os escritos de Antonio Maria Graziani (o cunhado do bisneto de Piero), que adquiriu a casa de Piero, indicam que o artista nasceu em 1412 no Burgo San Sepolcro (hoje Sansepolcro) na Itália central. Seu pai, Benedetto, era um próspero coureiro e sapateiro. Sabe-se pouco mais do que isto a respeito da infância de Piero, mas documentos recém-descobertos mostram que

ele passou algum tempo, antes de 1431, como aprendiz no ateliê do pintor Antonio D'Anghiari (cujas obras não sobreviveram). No final da década de 1430, Piero se mudou para Florença, onde começou a trabalhar com o artista Domenico Veneziano. Em Florença, o jovem pintor conheceu os trabalhos de pintores do início do Renascimento, como Fra Angelico e Masaccio, e as esculturas de Donatello. Ele ficou particularmente impressionado com a serenidade das obras religiosas de Fra Angelico, e seu próprio estilo, em termos de aplicação da cor e da luz, reflete esta influência. Mais tarde, todas as fases do trabalho de Piero foram caracterizadas por surtos de atividade em vários lugares, entre eles Rimini, Arezzo e Roma. As figuras que Piero pintou têm uma solidez arquitetônica, como no "Flagelo de Cristo" (atualmente na Galleria Nationale delle Marche, em Urbino, Figura 45), ou parecem extensões naturais do ambiente, como em "O Batismo" (atualmente na National Gallery, em Londres, Figura 46).



Figura 45



Figura 46

Em *As vidas dos mais eminentes pintores, escultores e arquitetos*, o primeiro historiador da arte, Giorgio Vasari (1511-1574), escreveu que Piero demonstrava grande habilidade matemática desde a infância e atribuiu a ele "muitos" tratados matemáticos. Alguns foram escritos quando o pintor, devido à idade avançada, não podia mais praticar a arte. Em uma dedicató-

ria ao duque Guidobaldo de Urbino, Piero diz a respeito de um de seus livros, que ele foi escrito "para que sua inteligência não ficasse entorpecida pela falta de uso". Três dos trabalhos matemáticos de Piero foram preservados: *De Prospectiva pingendi* (*Sobre a perspectiva na pintura*), *Libellus de Quinque Corporibus Regularibus* (*Livro curto sobre os cinco sólidos regulares*), e *Trattato d'Abaco* (*Tratado sobre o ábaco*).

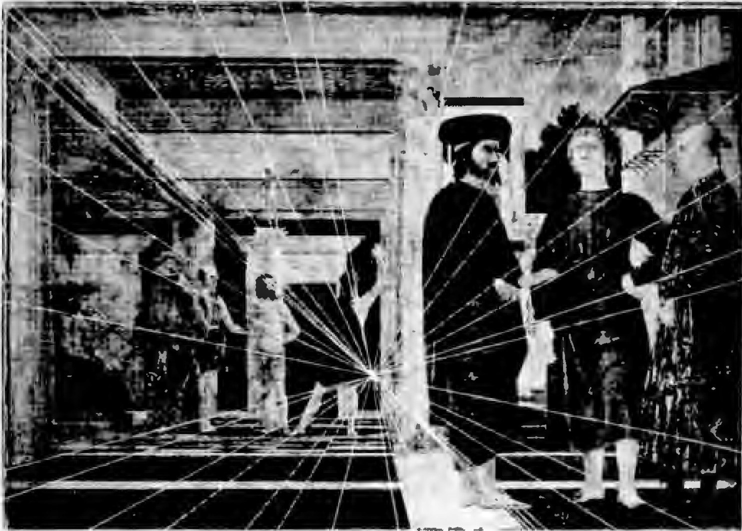


Figura 47

Sobre a perspectiva, de Piero (escrito em meados da década de 1470 até meados da década de 1480), contém numerosas referências aos *Elementos* e à *Óptica* de Euclides, pois ele estava decidido a demonstrar que a técnica para se obter a perspectiva em uma pintura recaía firmemente na base científica da percepção visual. Em suas próprias pinturas, a perspectiva fornece uma ambientação espacial que está em total consonância com as propriedades geométricas das figuras contidas. De fato, para Piero, a pintura em si era principalmente "a demonstração, em um plano, de corpos em tamanhos decrescentes ou crescentes". Essa atitude é manifestada de modo magnífico em "Flagelo" (Figuras 45 e 47), que é uma das poucas pinturas

renascentistas com uma construção de perspectiva meticulosamente determinada. Como o artista moderno David Hockney diz em seu livro *Secret Knowledge* (*Conhecimento secreto*), de 2001, Piero pinta "do modo como sabe que as figuras são, não do modo como ele as vê".

Por ocasião dos 500 anos da morte de Piero, os pesquisadores Laura Geatti, da Universidade de Roma, e Luciano Fortunati, do Conselho Nacional de Pesquisa em Pisa, fizeram uma análise detalhada, com a ajuda de computadores, do "Flagelo". Eles digitalizaram a imagem inteira e determinaram as coordenadas de todos os pontos, mediram todas as distâncias e fizeram uma análise de perspectiva completa usando cálculos algébricos. Isto lhes permitiu determinar a exata localização do "ponto de fuga", para o qual convergem todas as linhas que partem diretamente do observador (Figura 47), que Piero usou para conseguir a impressionante "profundidade" da pintura.

O brilhante livro de Piero sobre perspectiva se tornou o manual padrão para artistas que tentavam pintar figuras planas e sólidos, e as partes menos matemáticas (e mais acessíveis) do tratado foram incorporadas à maioria das obras posteriores sobre perspectiva. Vasari atesta que, devido ao forte embasamento matemático de Piero, "ele entendia melhor do que qualquer outro todas as curvas dos corpos regulares e a ele devemos a luz que jogou sobre o assunto". Um exemplo da análise cuidadosa de Piero sobre como desenhar um pentágono em perspectiva é mostrado na Figura 48.

Tanto no *Tratado sobre o ábaco* como em *Cinco sólidos regulares*, Piero apresenta uma vasta gama de problemas (e suas soluções) que envolvem o pentágono e os cinco sólidos platônicos. Ele calcula os comprimentos dos lados e das diagonais, além de áreas e volumes. Muitas das soluções envolvem a Razão Áurea e algumas das técnicas de Piero representam um pensamento inovador e original.

Tal como Fibonacci antes dele, Piero escreveu o *Tratado sobre o ábaco* principalmente para fornecer aos mercadores de sua época receitas matemáticas e regras geométricas. Num mundo comercial em que não havia um sistema único de pesos e medidas e tampouco formatos ou tamanhos

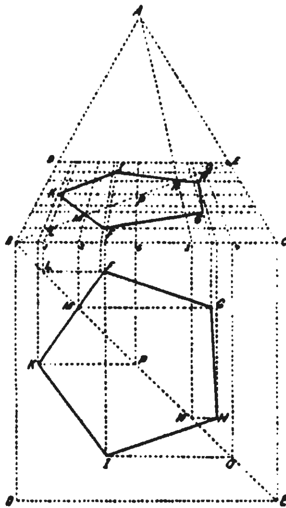


Figura 48

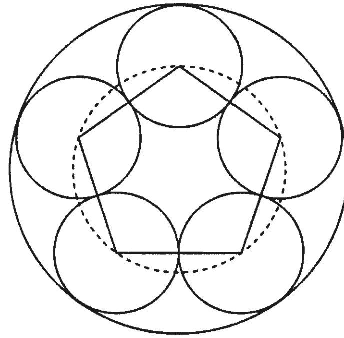


Figura 49

convencionados de recipientes, a capacidade de calcular volumes de formas era uma necessidade absoluta. No entanto, a curiosidade matemática de Piero o levou muito além dos assuntos com aplicações cotidianas. Neste sentido, encontramos em seus livros problemas "inúteis", como calcular o lado de um octaedro inscrito dentro de um cubo ou o diâmetro de cinco pequenos círculos inscritos em um círculo de diâmetro conhecido (Figura 49). A solução deste último problema envolve um pentágono e, portanto, a Razão Áurea.

Boa parte do trabalho algébrico foi incluída em um livro publicado por Luca Pacioli (1445-1517), intitulado *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (Coletânea de conhecimentos de aritmética, geometria, proporção e proporcionalidade). A maioria das obras de Piero sobre sólidos, publicadas em latim, foi traduzida para o italiano pelo mesmo Luca Pacioli e de novo incorporada (ou, dizendo de forma menos polida, simplesmente plagiada) no seu famoso livro sobre a Razão Áurea, *Divina Proportione* (A proporção divina).

Quem era esse matemático extremamente controverso, Luca Pacioli? Será

que ele foi o maior plagiador da matemática de todos os tempos ou um grande comunicador da matemática?

HERÓI NÃO ACLAMADO DA RENASCENÇA?

Luca Pacioli nasceu em 1445 no Borgo San Sepolcro (a mesma vila toscana em que Piero della Francesca nasceu e manteve sua oficina). De fato, Pacioli teve sua educação inicial na oficina de Piero. Contudo, ao contrário de outros alunos que mostraram habilidade na arte da pintura e de alguns, como Pietro Perugino, que estavam destinados a se tornarem grandes pintores, mostrou ser mais promissor na matemática. Piero e Pacioli se tornaram muito próximos mais tarde, como foi comprovado pelo fato de que Piero incluiu um retrato de Pacioli como São Pedro, o Mártir, em uma pintura de "Madona e criança com santos e anjos". Pacioli se mudou para Veneza ainda relati-



Figura 50

vamente jovem e se tornou tutor dos três filhos de um mercador rico. Em Veneza, continuou sua educação matemática (sob a orientação do matemático Domenico Bragadino) e escreveu seu primeiro manual sobre aritmética.

Na década de 1470, Pacioli estudou teologia e foi ordenado frade franciscano. Conseqüentemente, costuma-se citá-lo como Fra Luca Pacioli. Nos anos seguintes, viajou bastante, ensinando matemática nas universidades de Perúgia, Zara, Nápoles e Roma. Durante esse período, pode também ter sido tutor, por algum tempo, de Guidobaldo de Montefeltro, que se tornaria duque de Urbino em 1482.

No que talvez seja o melhor retrato de um matemático já produzido, Jacopo de' Barbari (1440-1515) mostra Luca Pacioli dando uma aula de geometria a um aluno (Figura 50; a pintura está atualmente na Galleria Nazionale di Capodimonte, em Nápoles). Um dos sólidos platônicos, o dodecaedro, é visto à direita, em cima do *Summa* de Pacioli. O próprio Pacioli, vestido com suas roupas de frei e quase parecendo um sólido geométrico, é mostrado copiando um diagrama do volume XIII dos *Elementos* de Euclides. Um poliedro transparente, conhecido como *rombicuboctaedro* (um dos Sólidos Arquimedianos, com vinte e seis faces, das quais dezoito são quadrados e oito são triângulos eqüiláteros), cheio de água até a metade flutuando no ar, simboliza a pureza e atemporalidade da matemática. O artista capturou as reflexões e refrações desse poliedro de vidro com habilidade extraordinária. A identidade da segunda pessoa na pintura tem sido objeto de debate. Uma das sugestões é que o estudante seria o duque Guidobaldo. O matemático britânico Nick MacKinnon levantou uma possibilidade interessante em 1993. Em um artigo bem pesquisado intitulado "O Retrato de Fra Luca Pacioli", que foi publicado na *Mathematical Gazette*, MacKinnon sugere que a figura é do famoso pintor alemão Albrecht Dürer, que tinha grande interesse por geometria e perspectiva (e cuja relação com Pacioli será abordada mais adiante neste capítulo). O rosto do estudante tem, de fato, uma semelhança espantosa com o auto-retrato de Dürer.

Pacioli voltou ao Burgo San Sepolcro em 1489, após ter sido agraciado com alguns privilégios especiais pelo papa, mas teve de enfrentar a inveja do *establishment* religioso. Durante quase dois anos chegou a ser impedido

de dar aulas. Em 1494, Pacioli foi a Veneza para publicar seu *Summa*, que dedicou ao duque Guidobaldo. Enciclopédico em natureza e escopo (cerca de 600 páginas), o *Summa* compilou o conhecimento matemático da época em aritmética, álgebra, geometria e trigonometria. Nesse livro, Pacioli toma emprestado livremente (em geral com o reconhecimento apropriado) problemas sobre o icosaedro e o dodecaedro do *Trattato* de Piero e problemas de álgebra e geometria de Fibonacci como sua fonte principal; Pacioli afirma que, quando ninguém é citado, o trabalho pertence a Leonardus Pisanus. Uma parte interessante do *Summa* é sobre a contabilidade de partidas dobradas, um método de registrar que permite rastrear de onde vem o dinheiro e para onde ele vai. Embora Pacioli não tenha inventado este sistema, mas apenas resumido as práticas dos mercadores venezianos durante a Renascença, este é considerado o primeiro livro publicado sobre contabilidade. O desejo de Pacioli de "dar ao negociante informação imediata sobre os seus ativos e passivos" conferiu-lhe o título de "Pai da Contabilidade", e contadores de todo o mundo comemoraram em 1994 (em Sansepolcro, como a vila é conhecida hoje) o 500º aniversário do *Summa*.

Em 1480, Ludovico Sforza se tornou efetivamente o duque de Milão. Na verdade, ele era apenas o regente do verdadeiro duque de sete anos de idade, após um episódio de intriga política e assassinato. Decidido a fazer da sua corte um lar para estudiosos e artistas, Ludovico convidou Leonardo da Vinci em 1482 como um "pintor e engenheiro do duque". Leonardo tinha considerável interesse por geometria, especialmente por suas aplicações práticas em mecânica. Nas suas palavras: "A mecânica é o paraíso das ciências matemáticas, pois por meio dela se vêem os frutos da matemática". Conseqüentemente, foi Leonardo quem provavelmente induziu o duque a convidar Pacioli para se juntar à corte, como professor de matemática, em 1496. Sem dúvida, Leonardo aprendeu um pouco de geometria com Pacioli, enquanto infundia neste uma maior apreciação da arte.

Durante sua estada em Milão, Pacioli completou o trabalho de seu tratado de três volumes, *Divina Proportione* (A proporção divina), que finalmente foi publicado em 1509. O primeiro volume, *Compendio de Divina Proportione* (Compêndio da Proporção Divina), contém um sumário deta-

lhado das propriedades da Razão Áurea (à qual Pacioli se refere como a "Divina Proporção") e um estudo dos sólidos platônicos e outros poliedros. Na primeira página de *A Proporção Divina* Pacioli declara de um modo um tanto grandiloqüente que essa é "uma obra necessária para toda mente humana perspicaz e inquisidora, na qual todos que gostam de estudar filosofia, perspectiva, pintura, escultura, arquitetura, música e outras disciplinas matemáticas irão encontrar ensinamentos delicados, sutis e admiráveis e irão se deliciar em diversas questões que abarcam uma ciência muito secreta".

Pacioli dedicou o primeiro volume de *A Proporção Divina* a Ludovico Sforza, e no quinto capítulo ele apresenta cinco razões pelas quais acredita que o nome apropriado para a Razão Áurea deveria ser *A Proporção Divina*.

1. "Que ela é uma só e não mais." Pacioli compara o valor único da Razão Áurea com o fato de que a unidade "é o supremo epíteto do próprio Deus".
2. encontra uma similaridade entre o fato de que a definição da Razão Áurea envolve exatamente três comprimentos (*AC*, *CB* e *AB* na Figura 24) e a existência da Santíssima Trindade, do Pai, do Filho e do Espírito Santo.
3. Para Pacioli, a impossibilidade da compreensão de Deus e o fato de a Razão Áurea ser um número irracional são equivalentes. Em suas próprias palavras: "Assim como Deus não pode ser definido adequadamente nem entendido por meio de palavras, nossa proporção também não pode ser designada por números inteligíveis nem pode ser expressa por uma quantidade racional, e sempre permanecerá oculta e secreta, e é chamada de irracional pelos matemáticos".
4. Pacioli compara a onipresença e a invariabilidade de Deus com a autosimilaridade associada à Razão Áurea — de que seu valor é sempre o mesmo e não depende do comprimento da linha sendo dividida ou do tamanho do pentágono no qual quocientes entre os comprimentos são calculados.
5. A quinta razão revela uma visão ainda mais platônica da existência do que a expressa pelo próprio Platão. Pacioli sustenta que, assim como Deus conferiu existência a todo o cosmo através da quinta essência,

> representado pelo dodecaedro, a Razão Áurea conferiu existência ao dodecaedro, já que não se pode construir o dodecaedro sem a Razão Áurea. Ele acrescenta que é impossível comparar os outros quatro sólidos platônicos (representando terra, água, ar e fogo) entre si sem a Razão Áurea.

No próprio livro, Pacioli delira incessantemente a respeito das propriedades da Razão Áurea. Ele analisa em sucessão o que chama de treze diferentes "efeitos" da "proporção divina" e anexa a cada um desses "efeitos" adjetivos como "essencial", "singular", "maravilhoso", "supremo", e assim por diante. Por exemplo, ele considera o "efeito" de que Retângulos Áureos podem ser inscritos no icosaedro (Figura 22) como "incompreensível". Pacioli pára nos treze "efeitos", concluindo que "pelo bem da salvação, essa lista deve terminar", pois treze homens estavam presentes à mesa na Última Ceia.

Não há dúvida de que Pacioli tinha grande interesse pelas artes e que sua intenção em *A Proporção Divina* era em parte aperfeiçoar suas bases matemáticas. Sua frase de abertura na primeira página do livro expressa o desejo de revelar a artistas, por meio da Razão Áurea, o "segredo" das formas harmônicas. Para assegurar sua atratividade, Pacioli obteve para *A Proporção Divina* os serviços do ilustrador dos sonhos de qualquer escritor — o próprio Leonardo da Vinci forneceu sessenta ilustrações de sólidos, representados tanto na forma da estrutura básica (Figura 51) como na forma sólida (Figura 52). Pacioli foi rápido em expressar sua gratidão. Escreveu a respeito da contribuição de Leonardo, dizendo que

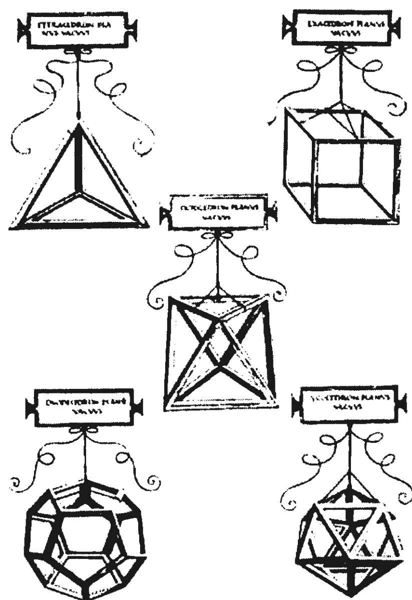


Figura 51

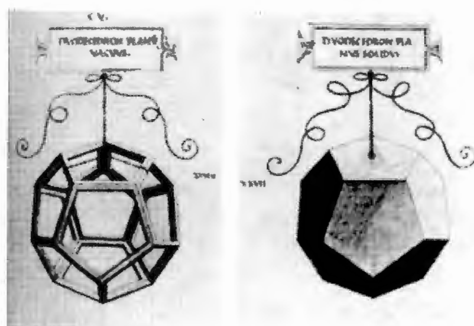


Figura 52

era "o mais perfeito pintor de perspectiva, arquiteto, músico, o homem dotado de todas as virtudes, Leonardo da Vinci, que deduziu e elaborou uma série de diagramas de sólidos regulares". O próprio texto, no entanto, deixa um pouco a desejar nos seus declarados altos objetivos. Embora o livro comece com um sensacional floreio, ele continua com um conjunto de fórmulas matemáticas bastante convencionais, vagamente embaladas em definições filosóficas.

O segundo livro de *A Proporção Divina* é um tratado sobre proporção e suas aplicações na arquitetura e na estrutura do corpo humano. O tratamento de Pacioli foi baseado, em grande parte, no trabalho do eclético arquiteto romano Marcus Vitruvius Pollio (70-25 a.C.). Segundo Vitruvius:

> ... no corpo humano, o ponto central naturalmente é o umbigo. Porque se um homem for colocado deitado de costas, com as mãos e os pés estendidos e um compasso for centrado no seu umbigo, os dedos de suas mãos e de seus pés irão tocar a circunferência do círculo descrito a partir desse ponto. E assim como o corpo humano produz um contorno circular, uma figura quadrada também pode ser encontrada a partir dele. Pois se medirmos a distância das solas dos pés até o topo da cabeça e depois aplicarmos essa medida aos braços esticados, veremos que a largura será a mesma que a altura, como no caso de superfícies planas que são perfeitamente quadradas.

Esta passagem foi considerada pelos estudiosos renascentistas mais uma demonstração da ligação entre a base orgânica e a geométrica da beleza, e isto levou ao conceito do "homem vitruviano", lindamente desenhado por Leonardo (Figura 53; atualmente na Galleria dell'Accademia, Veneza). Conseqüentemente, o livro de Pacioli também começa com uma discussão so-

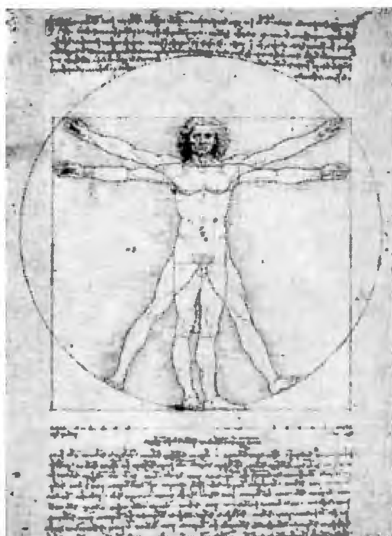


Figura 53

bre as proporções do corpo humano, "já que no corpo humano podem ser encontrados todos os tipos de proporção e de proporcionalidade, produzidas pelas ordens do Todo-Poderoso por meio dos mistérios internos da natureza". Porém, ao contrário das freqüentes afirmações na literatura, Pacioli não insiste na Razão Áurea como determinante das proporções em todas as obras de arte. Em vez disso, ao lidar com desenho e proporção, ele defende especificamente o sistema vitruviano, que é baseado em razões simples (racionais). O escritor Roger Herz-Fischler atribuiu a falácia da Razão Áurea como um cânone de Pacioli para a proporção a uma afirmação falsa feita na edição de 1799 de *Histoire de Mathématiques* (História da Matemática), dos matemáticos franceses Jean Etienne Montucla e Jérôme de Lalande.

O terceiro volume de *Divina* (um livro curto dividido em três partes sobre os cinco corpos regulares) é essencialmente uma tradução, palavra por palavra, para o italiano de *Cinco sólidos regulares*, de Piero, escrito em latim. O fato de que em nenhum lugar do texto Pacioli reconhece que foi simplesmente o tradutor do livro provocou uma violenta denúncia do historiador de arte Giorgio Vasari. Vasari escreve sobre Piero della Francesca que ele

> ...era considerado um grande mestre dos problemas dos sólidos regulares, tanto aritméticos quanto geométricos, mas não pôde, devido à perda da visão que sofreu em idade avançada e em seguida pela morte, tornar conhecidas suas brilhantes pesquisas e os muitos livros que escreveu. O homem que deveria ter feito o máximo para aumentar a reputação e a fama de Piero, já que Piero lhe ensinara tudo que sabia, vergonhosa e perversamente tentou apagar o nome de seu professor e usurpar para si próprio a

> honra que pertencia inteiramente a Piero. Pois publicou com seu nome, que era Fra Luca dal Borgo [Pacioli], todas as pesquisas feitas por esse admirável idoso, que era um grande pintor, além de *expert* nas ciências.

Então, Pacioli era um plagiador? Muito possivelmente, embora em *Summa* ele tenha rendido homenagem a Piero, que ele considerou o "monarca de nossa época na pintura" e aquele que "nos é familiar por aquela vasta obra que elaborou sobre a arte da pintura e sobre a força da linha na perspectiva".

R. Emmett Taylor (1889-1956) publicou em 1942 um livro intitulado *No Royal Road: Luca Pacioli and His Times* (Sem Caminho fácil: Luca Pacioli e Seu Tempo). Neste livro, Taylor adota uma atitude bastante simpática em relação a Pacioli e argumenta que, considerando o estilo, Pacioli pode não ter tido nada a ver com o terceiro livro de *Divina*, e que este foi apenas anexado à obra de Pacioli.

Seja como for, não há dúvida de que, se não fosse pelos livros *impressos* de Pacioli, as idéias e construções matemáticas de Piero (que não foram publicadas em forma impressa) não teriam tido a ampla circulação que acabaram obtendo. Além disso, até a época de Pacioli, a Razão Áurea era conhecida apenas por nomes um tanto intimidantes, como "razão extrema e média" ou "proporção que tem uma média e dois extremos", e o próprio conceito só era conhecido pelos matemáticos. A publicação de *A Proporção Divina* em 1509 renovou o interesse pela Razão Áurea. O conceito poderia então ser considerado com atenção renovada, porque sua publicação na forma de livro o identificava como merecedor de respeito. A infusão de significado teológico/filosófico no *nome* ("Proporção Divina") também destacava a Razão Áurea como um tópico matemático no qual um grupo eclético de intelectuais cada vez maior poderia se aprofundar. Finalmente, com o livro de Pacioli, a Razão Áurea começou a se tornar disponível para artistas em tratados teóricos que não eram excessivamente matemáticos, que eles poderiam realmente usar.

Os desenhos de Leonardo da Vinci dos poliedros para *A Proporção Divina*, feitos (nas palavras de Pacioli) com sua "inefável mão esquerda", tiveram seu próprio impacto. Provavelmente, foram as primeiras ilustrações de sólidos vazados, que permitiram fácil distinção visual entre a frente e a parte de

trás. Leonardo pode ter desenhado o poliedro a partir de uma série de modelos de madeira, pois registros da Sala do Conselho em Florença indicam que um conjunto dos modelos de madeira de Pacioli foi adquirido pela cidade para exposição pública. Além dos diagramas para o livro de Pacioli, podemos encontrar esboços de muitos sólidos espalhados pelas anotações de Leonardo. Em uma delas ele apresenta uma construção geométrica aproximada de um pentágono. Esta fusão entre arte e matemática chega ao auge em seu *Trattato della pittura* (Tratado sobre pintura; organizado por Francesco Melzi, que herdou os manuscritos de Leonardo), que começa com uma admoestação: "Que nenhum não matemático leia meus trabalhos" — uma afirmação que dificilmente encontraremos em algum manual de arte contemporânea!

Os desenhos dos sólidos em *A Proporção Divina* também inspiraram alguns dos *intarsia* construídos por Fra Giovanni da Verona por volta de 1520. *Intarsia* representa uma forma especial de arte, na qual mosaicos planos elaborados são construídos de pedaços de madeira marchetada. Os painéis de *intarsia* de Fra Giovanni incluíam um icosaedro, que quase certamente usou os desenhos vazados de Leonardo como modelo.

As vidas de Leonardo e Pacioli continuaram a ser um tanto interligadas mesmo após a conclusão de *A Proporção Divina.* Em outubro de 1499, os dois fugiram de Milão depois que o exército francês, comandado pelo rei Luís XII, tomou a cidade. Após passarem curtos períodos em Mântua e Veneza, ambos se estabeleceram por algum tempo em Florença. Durante o período de sua amizade, o nome de Pacioli passou a ser associado a outras grandes obras matemáticas — uma tradução para o latim de *Elementos*, de Euclides e uma obra não publicada sobre matemática recreativa. A tradução de Pacioli de *Elementos* era uma versão anotada, baseada em uma tradução mais antiga de Campanus de Novara (1220-1296), que foi publicada em Veneza em 1482 (e que foi a primeira versão *impressa*). Pacioli não conseguiu publicar sua compilação de problemas de matemática recreativa e provérbios *De Viribus Quantitatis* (Os poderes dos números) antes de sua morte, em 1517. Este trabalho era um projeto conjunto de Pacioli e Leonardo, e as próprias notas de Leonardo contêm muitos dos problemas do *De Viribus*.

Fra Luca Pacioli certamente não pode ser lembrado por sua originalidade, mas sua influência no desenvolvimento da matemática em geral e na história da Razão Áurea em particular não pode ser negada.

MELANCOLIA

Outra figura renascentista de destaque que exibia uma intrigante combinação de interesses artísticos e matemáticos é o pintor alemão Albrecht Dürer.

Dürer é considerado por muitos o maior artista alemão do Renascimento. Nasceu em 21 de maio de 1471 na Cidade Livre Imperial de Nürnberg, filho de um artífice joalheiro. Aos dezenove anos ele já demonstrava talento e habilidade como pintor e desenhista de xilogravura que ultrapassavam os de seu professor, o principal pintor e ilustrador de livros de Nürnberg, Michael Wolgemut. Dürer então empreendeu uma viagem de quatro anos, durante a qual se convenceu de que a matemática, "a mais precisa, lógica e graficamente construtiva das ciências", tinha que ser um importante ingrediente da arte.

Conseqüentemente, após uma curta estada em Nürnberg, durante a qual se casou com Agnes Frey, filha de um artesão bem-sucedido, ele partiu de novo para a Itália, com o objetivo de expandir seus horizontes artísticos e matemáticos. Sua visita a Veneza em 1494-1495 parece ter servido exatamente para isso. O encontro de Dürer com o fundador da escola veneziana de pintura, Giovanni Bellini (1426-1516), causou uma forte impressão no jovem artista, e sua admiração por Bellini continuou durante toda a sua vida. Ao mesmo tempo, o encontro de Dürer com Jacopo de' Barbari, que pintou o extraordinário retrato de Luca Pacioli (Figura 50), fez com que ele conhecesse o trabalho matemático de Pacioli e sua importância para a arte. Especificamente, de' Barbari mostrou a Dürer duas figuras, uma masculina e uma feminina, construídas com métodos geométricos, e a experiência incentivou Dürer a investigar o movimento e as proporções humanas. Dürer provavelmente conheceu o próprio Pacioli em Bolonha, durante uma segunda visita à Itália entre 1505 e 1507. Em uma carta desse período, ele

descreve sua visita a Bolonha como sendo "pelo bem da arte, pois há alguém lá que me instruirá na arte secreta da perspectiva". Esse misterioso "alguém" em Bolonha foi interpretado por muitos como uma referência a Pacioli, embora outros nomes, como o do excepcional arquiteto Donato di Angelo Bramante (1444-1514) e o do teórico da arquitetura Sebastiano Serlio (1475-1554), também tenham sido sugeridos. Durante a mesma viagem pela Itália, Dürer se encontrou novamente com Jacopo de' Barbari. Sua segunda visita, porém, foi marcada pelo nervosismo um tanto paranóico de Dürer, que achava que poderia ser prejudicado por artistas invejosos da sua fama. Por exemplo, ele recusou convites para jantar por medo de que alguém pudesse tentar envenená-lo.

A partir de 1495, Dürer mostrou um sério interesse pela matemática. Ele gastou bastante tempo estudando os *Elementos* (uma tradução para o latim que obteve em Veneza, embora falasse pouco latim), as obras de Pacioli sobre matemática e arte e os trabalhos importantes sobre arquitetura, proporção e perspectiva do arquiteto romano Vitruvius e do arquiteto e teórico italiano Leon Baptista Alberti (1404-1472).

As contribuições de Dürer para a história da Razão Áurea vêm tanto na forma de trabalho escrito como através de sua arte. Seu maior tratado, *Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit* (Tratado sobre medida com compasso e régua), foi publicado em 1525 e foi um dos primeiros livros sobre matemática em alemão. Nele Dürer reclama que muitos artistas são ignorantes em geometria, "sem a qual ninguém pode ser ou se tornar um artista completo". O primeiro dos quatro livros do *Tratado* dá descrições detalhadas da construção de várias curvas, incluindo a espiral logarítmica (ou eqüiangular), que é, como vimos, intimamente relacionada à Razão Áurea. O segundo livro contém métodos exatos e aproximados de construção de muitos polígonos, incluindo duas construções do pentágono (uma exata e outra aproximada). Os sólidos platônicos, bem como outros sólidos, alguns criados pelo próprio Dürer, juntamente com a teoria de perspectiva e de sombras, são discutidos no quarto livro. Dürer não tinha a intenção de que seu livro fosse usado como um manual de Geometria — por exemplo, ele só dá um

exemplo de prova. Em vez disso, Dürer sempre começa com uma aplicação prática e depois continua com uma exposição sobre aspectos teóricos bem básicos. O livro contém algumas das representações mais antigas de redes de poliedros, que são folhas planas nas quais as superfícies de poliedros são desenhadas de tal maneira que as figuras podem ser cortadas (como peças inteiras) e dobradas para formar sólidos tridimensionais.

A ilustração de Dürer da rede de um dodecaedro (relacionado, como sabemos, à Razão Áurea) é mostrada na Figura 54.

Dürer misturou seu virtuosismo em xilogravuras e gravuras com seu interesse pela matemática na sua enigmática alegoria "Melencolia I" (Figura 55). Ela pertence a um trio de gravuras magistrais (as outras são "Cavaleiro, morte e mal" e "São Jerônimo em seu estúdio"). Sugeriu-se que Dürer criou a figura num acesso de melancolia após a morte de sua mãe. A figura central em "Melencolia" é uma mulher alada sentada, indiferente e desanimadamente, na borda de uma pedra. Na mão direita ela segura um compasso, aberto para medir. A maioria dos objetos na gravura tem múltiplos significados simbólicos, e artigos inteiros foram dedicados a sua interpretação. Considera-se que o pote sobre o fogo à esquerda, no meio, e a balança no alto representam a alquimia. O "quadrado mágico", na parte direita superior (em que cada linha, coluna e diagonal, os quatro números centrais e os números nos quatro cantos somam 34, que a propósito, é um número de Fibonacci, é considerado uma representação da matemática) (Figura 56). Os números do meio na linha de baixo formam 1514, a data da gravura. A inclusão do quadrado mágico provavelmente reflete a influência de Pacioli, pois o *De Viribus* de Pacioli inclui uma coleção de quadrados mágicos. O significado principal da gra-

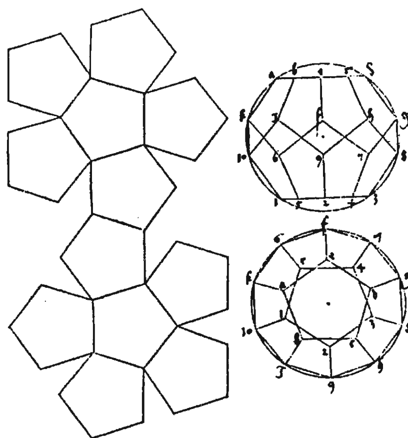


Figura 54

vura, com suas figuras geométricas, chaves, morcegos, paisagem marinha etc., parece ser uma representação da melancolia que envolve o artista ou pensador, em meio a dúvidas sobre o sucesso de seus esforços, enquanto o tempo, representado pela ampulheta no topo, segue.



Figura 55

O estranho sólido no meio, à esquerda, na gravura tem sido tema de sérias discussões e várias tentativas de reconstrução. À primeira vista, ele parece um cubo do qual dois vértices opostos foram cortados (o que inspirou algumas interpretações freudianas), mas não parece ser esse o caso. A maioria dos pesquisadores concluiu que a figura é o que se conhece como romboedro (um sólido de seis lados em que cada lado tem um formato rômbico; Figura 57), que foi truncado de tal maneira que pode ser circunscrito por uma esfera. Quando colocado sobre uma de suas faces triangulares, sua frente se encaixa perfeitamente no quadrado mágico. Os ângulos da face do sólido também foram objeto de debate. Enquanto muitos sugeriram que fosse de 72 graus, o que relacionaria a figura à Razão Áurea (veja Figura 25), o cristalógrafo holandês C. H. MacGillavry concluiu, com base em uma análise de perspectiva, que os ângulos são de 80 graus. As qualidades desconcertantes desse sólido estão admiravelmente resumidas num artigo de T. Lynch que foi publicado em 1982 no *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes*. Conclui o autor: "Como a representação de poliedros foi considerada um dos principais problemas de geometria perspectiva, de que maneira melhor poderia Dürer provar suas habilidades nesse campo senão incluindo numa gravura um formato que era tão novo e talvez até único, e deixando a questão sobre o que era aquilo e de onde veio para outros geômetras resolverem?"

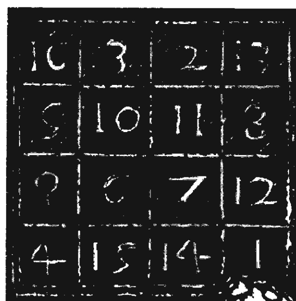


Figura 56

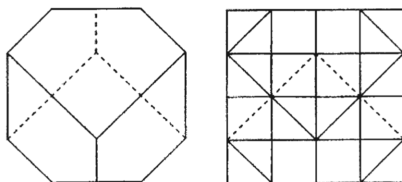


Figura 57

Com exceção do trabalho influente de Pacioli e das interpretações matemáticas/artísticas dos pintores Leonardo e Dürer, o século XVI não trouxe nenhum outro avanço surpreendente na história da Razão Áurea. Embora alguns matemáticos, entre os quais o italiano Rafael Bombelli (1526-1572) e o espanhol Franciscus Flussates Candalla (1502-1594), tenham usado a Razão Áurea em vários problemas que envolviam o pentágono e os sólidos platônicos, a aplicação mais empolgante teve de esperar o fim do século.

No entanto, os trabalhos de Pacioli, Dürer e outros reavivaram o interesse pelo platonismo e pelo pitagorianismo. De repente, os intelectuais renascentistas viram uma oportunidade real de relacionarem matemática e lógica racional ao universo em volta deles, no espírito da visão de mundo platônica. Conceitos como a "Proporção Divina" construíram, de um lado, uma ponte entre os matemáticos e os mecanismos do cosmo e, de outro, uma relação entre física, teologia e metafísica. A pessoa que, com suas idéias e obras, exemplifica mais do que qualquer outra a fascinante mistura de matemática e misticismo é Johannes Kepler.

MYSTERIUM COSMOGRAPHICUM

Johannes Kepler é mais lembrado como um astrônomo excepcional, responsável (entre outras coisas) pelas três leis do movimento planetário que levam seu nome. Mas Kepler também era um matemático talentoso, um metafísico

especulativo e um escritor prolífico. Nascido num período de grandes agitações políticas e caos religioso, a educação, a vida e o pensamento de Kepler foram criticamente moldados pelos acontecimentos à sua volta. Kepler nasceu em 27 de dezembro de 1571 na Cidade Imperial Livre de Weil der Stadt, Alemanha, na casa de seu avô Sebald. Seu pai, Heinrich, um soldado mercenário, ficou ausente de casa durante a maior parte da sua infância, e em suas curtas visitas era (nas palavras de Kepler) "um malfeitor, brusco e irascível". O pai saiu de casa quando Kepler tinha cerca de dezesseis anos e nunca mais foi visto. Supõe-se que ele tenha participado de uma batalha naval pelo Reino de Nápoles e tenha morrido na volta para casa. Em conseqüência disso, Kepler foi criado principalmente por sua mãe, Katharina, que trabalhava na estalagem de seu pai. A própria Katharina era uma pessoa um tanto estranha e desagradável, que colhia ervas e acreditava nos seus poderes mágicos de cura. Uma série de acontecimentos envolvendo rancores pessoais, intrigas infelizes e cobiça acabaram provocando sua prisão em idade avançada em 1620 e um indiciamento por bruxaria. Essas acusações não eram incomuns nessa época — nada menos que trinta e oito mulheres foram executadas por bruxaria em Weil der Stadt entre 1615 e 1629. Kepler, que já era bem conhecido na época da prisão dela, reagiu às notícias do processo de sua mãe "com angústia indizível". Ele efetivamente se encarregou da sua defesa, obtendo ajuda da Faculdade de Direito da Universidade de Tübingen. As acusações contra Katharina Kepler foram finalmente rejeitadas após longa provação, principalmente em vista de seu próprio testemunho sob ameaça de grande dor e tortura. Esta história mostra o clima e a confusão intelectual que prevaleceu durante o período do trabalho científico de Kepler. Ele nasceu numa sociedade que passara (apenas cinqüenta anos antes) pelo rompimento de Martinho Lutero com a Igreja Católica, proclamando que a única absolvição dos homens diante de Deus era a fé.

A sociedade também estava prestes a embarcar num sangrento e insano conflito conhecido como a Guerra dos Trinta Anos. É realmente espantoso ver hoje como, nesse contexto e com os violentos altos e baixos de sua vida tumultuada, Kepler conseguiu fazer uma descoberta que é considerada por muitos como o verdadeiro nascimento da ciência moderna.

Kepler começou seus estudos no seminário mais importante de Maulbronn e depois ganhou uma bolsa de estudos do duque de Württemberg para ingressar no seminário luterano da Universidade de Tübingen em 1589. Os dois temas que mais o atraíam, e que na sua cabeça estavam intimamente relacionados, eram a teologia e a matemática. Naquele tempo, a astronomia era considerada parte da matemática e o professor de astronomia de Kepler era o famoso astrônomo Michael Mästlin (1550-1631), com quem ele continuou a manter contato mesmo depois de deixar Tübingen.

Em suas aulas formais, Mästlin deve ter ensinado apenas o tradicional sistema geocêntrico ou ptolomaico, no qual a Lua, Mercúrio, Vênus, o Sol, Marte, Júpiter e Saturno giram ao redor da Terra imóvel. Mästlin, porém, estava totalmente a par do sistema heliocêntrico de Nicolau Copérnico, que foi publicado em 1543, e, em particular, ele de fato discutia os méritos desse sistema com seu aluno favorito, Kepler. No sistema de Copérnico, seis planetas (incluindo a Terra, mas não incluindo a Lua, que não era mais considerada um planeta e sim um "satélite") giravam ao redor do Sol. Da mesma maneira que de um carro em movimento você pode observar apenas os movimentos relativos de outros carros, no sistema de Copérnico muito do que parece ser o movimento dos planetas simplesmente reflete o movimento da própria Terra.

Kepler parece ter tido uma preferência imediata pelo sistema de Copérnico. A idéia fundamental dessa cosmologia, de um Sol central cercado por uma esfera de estrelas fixas com um espaço entre a esfera e o Sol, encaixava-se perfeitamente na sua visão do cosmo. Sendo uma pessoa profundamente religiosa, Kepler acreditava que o universo representa um reflexo do seu Criador. A unidade do Sol, das estrelas e do espaço do meio simbolizava para ele uma equivalência com a Santíssima Trindade do Pai, do Filho e do Espírito Santo.

Enquanto Kepler se graduava com distinção na faculdade de artes e estava quase terminando seus estudos teológicos, aconteceu alguma coisa que mudou sua profissão, de pastor para professor de matemática. O seminário protestante em Graz, na Áustria, pediu à Universidade de Tübingen para

recomendar uma substituição de um de seus professores de matemática que havia falecido, e a universidade escolheu Kepler. Assim, em março de 1594 Kepler começou, a contragosto, uma viagem de um mês até Graz, na província austríaca de Styria.

Percebendo que o destino o forçara a seguir a carreira de matemático, Kepler ficou decidido a cumprir o que via como seu dever cristão — entender a criação de Deus, o universo. Nesse sentido, ele mergulhou nas traduções dos *Elementos* e nos trabalhos dos geômetras alexandrinos Apolônio e Pappus. Aceitando o princípio geral do sistema heliocêntrico de Copérnico, ele começou a busca por respostas para as duas questões principais: "Por que havia exatamente seis planetas"? E "o que determinou que as órbitas planetárias fossem espaçadas como eram?" Essas perguntas do tipo "por que" e "o que" eram inteiramente novas no vocabulário astronômico. Diferentemente dos astrônomos antes dele, que se contentavam em simplesmente registrar as posições observadas dos planetas, Kepler estava procurando uma teoria que pudesse explicar tudo. Ele expressou elegantemente sua nova abordagem da investigação humana:

> Em toda aquisição de conhecimento ocorre que, começando pelas coisas que causam impacto em nossos sentidos, somos levados pela operação da mente a coisas mais elevadas que não podem ser compreendidas, por mais aguçados que sejam os sentidos. A mesma coisa acontece na área da astronomia, na qual primeiro percebemos com os nossos olhos as várias posições dos planetas em momentos diferentes, e o raciocínio então se impõe sobre essas observações e leva a mente a reconhecer a forma do universo.

Mas, Kepler se perguntava, que instrumento Deus utilizaria para projetar Seu universo?

O primeiro vislumbre do que estava para se tornar sua absurdamente fantástica explicação para essas questões cósmicas começou a se manifestar para Kepler em 19 de julho de 1595, quando estava tentando explicar as conjunções dos planetas externos, Júpiter e Saturno (quando os dois corpos

têm as mesmas coordenadas celestes). Basicamente, ele percebeu que quando inscrevia um triângulo equilátero num círculo (com seus vértices tocando no círculo) e outro círculo dentro do triângulo (tocando o meio dos lados; Figura 58), então a razão entre o raio do círculo maior e do menor era aproximadamente a mesma que a razão entre os tamanhos das órbitas de Saturno e Júpiter. Continuando com esta linha de raciocínio, ele concluiu que, para obter a órbita de Marte (o planeta seguinte mais próximo do Sol), precisaria usar a figura geométrica seguinte — um quadrado — inscrita no círculo menor. Isto, no entanto, não resultou no tamanho certo. Kepler não desistiu, e já estando num caminho inspirado pela visão platônica, de que "Deus sempre geometriza", nada era mais natural para ele do que considerar o próximo passo geométrico e tentar figuras tridimensionais. Este exercício resultou no primeiro uso de Kepler dos objetos geométricos relacionados à Razão Áurea.

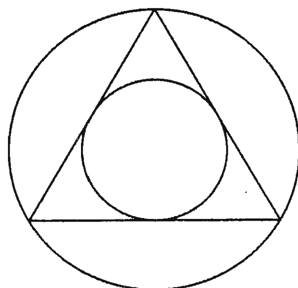
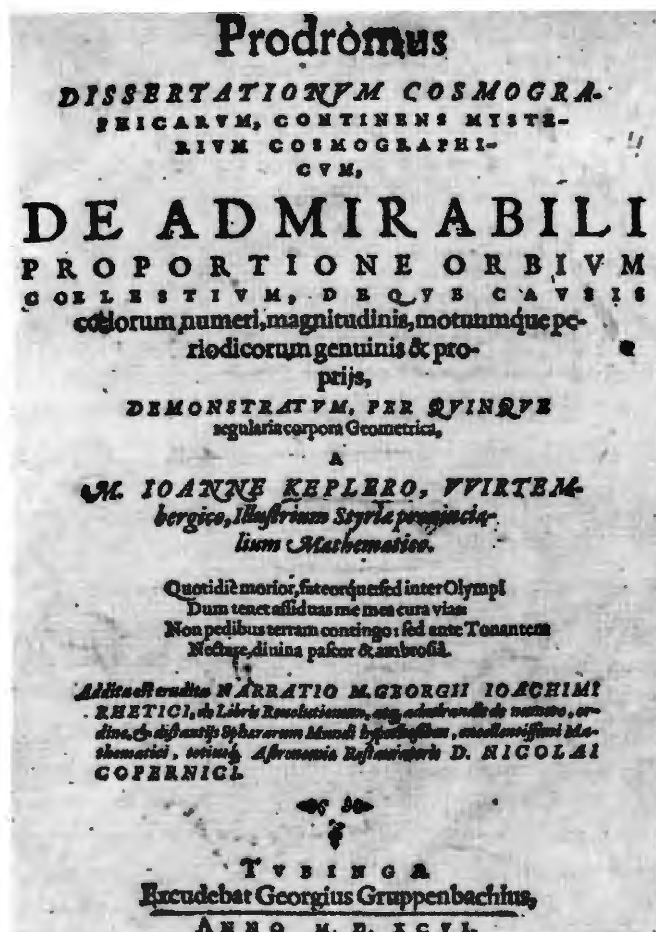


Figura 58

Kepler deu a resposta às duas perguntas que o intrigavam em seu primeiro tratado, conhecido como *Mysterium Cosmographicum* (O mistério cósmico), publicado em 1597. O título completo, dado na página de rosto do livro (Figura 59; embora conste que a data de publicação foi 1596, o livro foi publicado no ano seguinte) é: "Um precursor de dissertações cosmográficas, contendo o mistério cósmico das admiráveis proporções das esferas celestes, e as verdadeiras e próprias causas de seus números, tamanhos e movimentos periódicos dos céus, demonstrados pelos cinco sólidos geométricos regulares."

A resposta de Kepler a perguntas sobre o motivo da existência de seis planetas foi simples: porque existem exatamente cinco sólidos regulares platônicos. Considerados como bordas, os sólidos determinam seis espaços (com uma fronteira exterior esférica que corresponde ao céu das estrelas fixas). Além do mais, o modelo de Kepler foi projetado de modo a responder ao mesmo tempo à pergunta sobre os tamanhos das órbitas. Em suas palavras:



Prodromus

DISSERTATIONVM COSMOGRAPHICARVM, CONTINENS MYSTERIVM COSMOGRAPHICVM,

DE ADMIRABILI

PROPORTIONE ORBIVM COELESTIVM, DEQVE CAVSIS coelorum numeri, magnitudinis, motuumque periodicorum genuinis & propriis,

DEMONSTRATVM, PER QVINQVE regularia corpora Geometrica,

A

M. IOANNE KEPLERO, VVIRTEMbergico, Illustrium Styriae provincialium Mathematico.

Quotidie morior, fateorque: sed inter Olympi
Dum tenet assiduas me mea cura vias:
Non pedibus terram contingo: sed ante Tonantem
Nectare, diuina pascor & ambrosia.

Addita est erudita NARRATIO M. GEORGII IOACHIMI RHETICI, de Libris Revolutionum, atque admirandis de numero, ordine, & distantiis Sphaerarum Mundi hypothesibus, excellentissimi Mathematici, totiusque Astronomiae Restauratoris D. NICOLAI COPERNICI.

TVBINGAE

Excudebat Georgius Gruppenbachius,

ANNO M. D. XCVI.

Figura 59

A esfera da Terra é a medida de todas as outras órbitas. Circunscreva um dodecaedro em volta dela. A esfera que a envolver será a de Marte. Circunscreva um tetraedro em volta de Marte. A esfera que a envolver será a de Júpiter. Circunscreva um cubo em volta de Júpiter. A esfera que a envolver será a de Saturno. Agora, inscreva um icosaedro dentro da órbita da Terra. A esfera dentro dela será a de Vênus. Inscreva um octaedro dentro de Vênus. A esfera inscrita nela será a de Mercúrio. Assim se obtém a base para o número de planetas.

A Figura 60 mostra um esquema do *Mysterium Cosmographicum*, que ilustra o modelo cosmológico de Kepler. Ele explicou até certo ponto por que fez as associações específicas entre os sólidos platônicos e os planetas, com base nos seus atributos geométricos, astrológicos e metafísicos. Ele ordenou os sólidos baseado nas relações com a esfera, supondo que as diferenças entre a esfera e os outros sólidos refletiam a distinção entre o criador e suas criações. Do mesmo modo, o cubo é caracterizado por um *único* ângulo — o ângulo reto. Para Kepler, isto simbolizava solidão associada a Saturno, e assim por diante. De modo mais geral, a astrologia era relevante para Kepler porque "o homem é o objetivo do universo e de toda a criação," e a abordagem metafísica se justificava pelo fato de que "os objetos matemáticos são as causas dos físicos, pois Deus, desde o começo dos tempos, carregou consigo, em abstração simples e divina, os objetos matemáticos como protótipos das quantidades materialmente planejadas".

A posição da Terra foi escolhida de modo a separar os sólidos que podem ficar de pé (i.e., o cubo, o tetraedro e o dodecaedro), dos que "flutuam" (i.e., o octaedro e o icosaedro).

Os espaçamentos dos planetas resultantes deste modelo combinavam razoavelmente com alguns planetas, mas eram significativamente discrepantes no caso de outros (embora a discrepância em geral não passasse de 10%). Kepler, absolutamente convencido da correção do seu modelo, atribuiu a maior parte das incoerências à imprecisão nas medidas das órbitas. Ele mandou cópias do livro para vários astrônomos, a fim de receber comentários, incluindo uma cópia para uma das figuras mais destacadas da época, o dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601). Uma cópia acabou

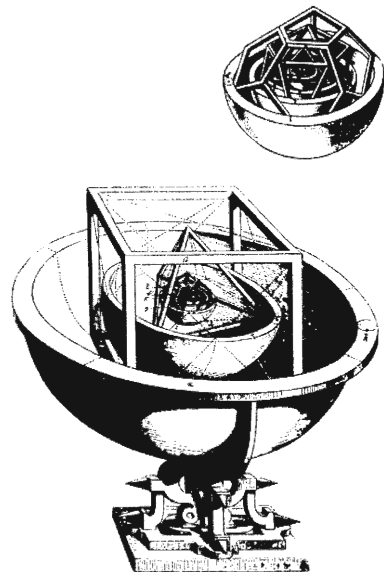


Figura 60

chegando até mesmo às mãos do grande Galileu Galilei (1564-1642), que informou a Kepler que ele também acreditava no modelo de Copérnico, mas lamentava o fato de que, "para um grande número de pessoas (pois este é o número de tolos)", Copérnico "parecia ter sido feito para ser ridicularizado, vaiado e expulso do palco".

Não é preciso dizer que o modelo cosmológico de Kepler, que era baseado nos sólidos platônicos, não só estava totalmente errado, mas era louco até mesmo para a época de Kepler. A descoberta dos planetas Urano (que vem depois de Saturno em termos da distância crescente do Sol) em 1781 e Netuno (o seguinte após Urano) em 1846 pôs um ponto final numa idéia já moribunda. Mesmo assim, é impossível superestimar a importância desse modelo na história da ciência. Como disse o astrônomo Owen Gingerich no seu artigo biográfico sobre Kepler: "Raramente na história um livro tão errado foi tão fundamental para orientar o curso futuro da ciência." Kepler pôs na idéia pitagórica de um cosmo que pode ser explicado pela matemática um enorme passo adiante. Ele desenvolveu um verdadeiro *modelo matemático* do universo, que, por um lado, baseava-se em medidas de observação existentes e, por outro, era *falsificável* por observações que poderiam ser feitas subseqüentemente. Estes são exatamente os ingredientes exigidos pelo "método científico" — uma abordagem organizada para explicar fatos observados com um modelo da natureza. Um método científico idealizado começa com a compilação de fatos, depois é proposto um modelo, e as previsões do modelo são testadas por meio de experimentos ou de mais observações. Esse processo às vezes é resumido pela seqüência: indução, dedução, verificação. De fato, Kepler teve até a chance de fazer uma previsão bem-sucedida com a sua teoria. Em 1610, Galileu descobriu com seu telescópio quatro novos corpos celestes no Sistema Solar. Se eles fossem planetas, isto teria sido um golpe fatal na teoria de Kepler já durante sua vida. Mas, para alívio de Kepler, esses novos corpos eram satélites (como a nossa Lua) em volta de Júpiter, e não novos planetas girando em torno do Sol.

As teorias físicas atuais que pretendem explicar a existência de todas as partículas elementares (subatômicas) e as interações básicas entre elas fazem

uso de simetrias matemáticas de modo bastante semelhante à teoria de Kepler ao utilizar propriedades de simetria dos sólidos platônicos para explicar o número e as propriedades dos planetas. O modelo de Kepler tinha algo mais em comum com a atual teoria fundamental do universo: as duas teorias são, pela sua própria natureza, *reducionistas* — elas tentam explicar muitos fenômenos em termos de umas poucas leis fundamentais. Por exemplo, o modelo de Kepler deduziu tanto o número de planetas quanto as propriedades de suas órbitas a partir dos sólidos platônicos. De modo semelhante, teorias modernas conhecidas como Teorias das Cordas usam entidades básicas (cordas) que são extremamente minúsculas (mais de um bilhão de bilhão de vezes menor que um núcleo atômico) para deduzir as propriedades de todas as partículas elementares. Como uma corda de violino, as cordas podem vibrar e produzir uma variedade de "tons," e todas as partículas elementares conhecidas simplesmente representam esses diferentes tons.

O persistente interesse de Kepler pela Razão Áurea durante sua estada em Graz produziu outro resultado interessante. Em outubro de 1597, ele escreveu para Mästlin, seu antigo professor, a respeito do seguinte teorema: "Se numa linha dividida nas razões média e extrema se constrói um triângulo retângulo, de modo que o ângulo reto esteja sobre a perpendicular colocada no ponto da secção, então o lado menor terá o mesmo valor do maior segmento da linha dividida." A afirmação de Kepler está representada na Figura 61. A linha *AB* está dividida na Razão Áurea pelo ponto *C*. Kepler constrói um triângulo retângulo *ADB* sobre *AB* como hipotenusa, com o ângulo reto *D* na perpendicular colocada no ponto *C* da Secção Áurea. Ele então prova que *BD*, o lado mais curto do ângulo reto, é igual a *AC* (o segmento maior da linha dividida na Razão Áurea). O que torna este triângulo especial (além do uso da Razão Áurea) é que em 1855 ele foi usado pelo piramidólogo Friedrich Röber em uma das falsas teorias que explicavam o aparecimento da Razão Áurea no projeto das pirâmides. Röber não estava a par do trabalho de Kepler, mas usou uma construção semelhante para dar suporte à sua idéia de que a "proporção divina" tinha um papel decisivo na arquitetura.

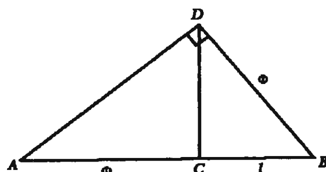


Figura 61

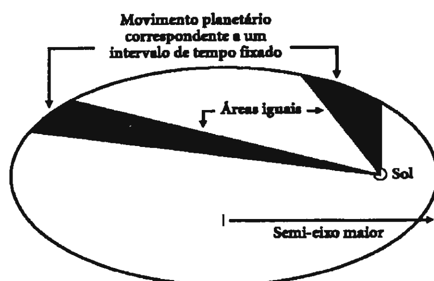


Figura 62

O *Mysterium Cosmographicum* de Kepler provocou um encontro entre ele e Tycho Brahe em Praga — nessa época, a sede do Sacro Império Romano. O encontro ocorreu em 4 de fevereiro de 1600 e foi o prelúdio da mudança de Kepler para Praga como assistente de Tycho em outubro do mesmo ano (após ser obrigado a sair da Graz católica devido à sua fé luterana). Quando Brahe morreu, em 24 de outubro de 1601, Kepler se tornou o Matemático Imperial.

Tycho deixou um vasto conjunto de observações particularmente sobre a órbita de Marte, e Kepler usou esses dados para descobrir as duas primeiras leis dos movimentos planetários que levam o seu nome. A Primeira Lei de Kepler diz que as órbitas dos planetas conhecidos em torno do Sol não são círculos perfeitos mas elipses, com o Sol em um de seus focos (Figura 62; a excentricidade da elipse está bastante exagerada). Uma elipse tem dois pontos chamados de focos, de modo que a soma das distâncias de qualquer ponto da elipse aos dois focos é a mesma. A Segunda Lei de Kepler estabelece que os planetas se movem mais depressa quando estão mais próximos do Sol (o ponto conhecido como periélio) e mais devagar quando estão mais distantes (afélio), de tal modo que a linha que liga o planeta ao Sol percorre áreas iguais em intervalos de tempo iguais (Figura 62). A questão do que faz as leis de Kepler valerem foi o grande problema não resolvido da ciência durante quase setenta anos após a publicação das leis. Foi preciso o gênio de Isaac Newton (1642-1727) para deduzir que a força que mantém os planetas em suas órbitas é a gravidade. Newton explicou as leis de Kepler resolvendo simultaneamente as leis que descrevem o movimento

dos corpos com a lei da gravitação universal. Ele mostrou que as órbitas elípticas com velocidades variáveis (como descrito pelas leis de Kepler) representam uma possível solução para essas equações.

Os esforços heróicos de Kepler nos cálculos da órbita de Marte (muitas centenas de folhas de aritmética e sua interpretação — apelidados por ele de "minha guerra contra Marte") são considerados por muitos pesquisadores como indicadores do nascimento da ciência moderna. Especificamente, em dado momento ele encontrou uma órbita circular que combinava praticamente com todas as observações de Tycho. Em dois casos, porém, essa órbita previa uma posição que diferia das observações por cerca de um quarto do diâmetro angular de uma lua cheia. Kepler escreveu a respeito desse fato: "Se eu tivesse acreditado que poderíamos ignorar esses oito minutos [de arco], teria consertado minha hipótese no Capítulo 16 de acordo com isso. Porém, como não era permissível desconsiderar, esses meros oito minutos apontaram o caminho para uma completa reformulação na astronomia".

Os anos de Kepler em Praga foram extremamente produtivos tanto em astronomia como em matemática. Em 1604, ele descobriu uma "nova" estrela, conhecida como a Supernova de Kepler. Uma supernova é uma potente explosão estelar, na qual uma estrela que se aproxima do fim de sua vida ejeta suas camadas externas numa velocidade de vinte mil quilômetros por segundo. Em nossa galáxia Via Láctea, essas explosões ocorrem, em média, uma vez a cada cem anos. Na verdade, Tycho descobriu uma supernova em 1572 (a Supernova de Tycho), e Kepler descobriu uma em 1604. Desde então, porém, por razões desconhecidas, nenhuma outra supernova foi descoberta na Via Láctea (embora uma tenha explodido aparentemente despercebida na década de 1660). Astrônomos dizem brincando que talvez essa escassez de supernovas simplesmente reflita o fato de que não têm havido astrônomos realmente formidáveis desde Tycho e Kepler.

Em junho de 2001, visitei a casa em que Kepler viveu em Praga, na Rua Karlova, 4. Hoje, ela é uma movimentada rua comercial, e é fácil deixar de perceber a placa enferrujada acima do número 4 que diz que Kepler morou lá

de 1605 a 1612. Um dos donos da loja que fica logo abaixo do apartamento de Kepler nem sabia que um dos maiores astrônomos de todos os tempos viveu lá. O pátio interno, de aspecto triste, de fato contém uma pequena escultura da esfera armilar com o nome de Kepler escrito sobre ela, e uma outra placa localizada perto da caixa de correio. Mas o próprio apartamento de Kepler não tem qualquer marca especial e não é aberto ao público, sendo ocupado por uma das muitas famílias que vivem nos andares residenciais superiores.

O trabalho matemático de Kepler produziu alguns outros destaques na história da Razão Áurea. No texto de uma carta que ele escreveu em 1608 a um professor em Leipzig, verificamos que tinha descoberto a relação entre os números de Fibonacci e a Razão Áurea. Ele repete o conteúdo dessa descoberta num ensaio que investiga o motivo da forma do floco de neve de seis pontas. Kepler escreve:

> Dos dois sólidos regulares, o dodecaedro e o icosaedro... esses sólidos, e de fato a estrutura do próprio pentágono não podem ser formados sem a proporção divina, como os geômetras de hoje a chamam. É arranjada de tal maneira que os dois termos menores de uma série progressiva constituem juntos o terceiro, e destes, os últimos dois, quando somados, resultam no termo imediatamente subseqüente, e assim por diante, até o infinito, enquanto a mesma proporção continua intacta... quanto mais avançarmos a partir do primeiro número, mais perfeito fica o exemplo. Sejam os menores números 1 e 1... some-os, e a soma será 2; some esse com o último dos uns, resultando 3. Some 2 a isso, e tenha 5. Some 3, e tenha 8; 5 e 8, 13; 8 e 13, 21. Assim como 5 está para 8, 8 está para 13, aproximadamente, e 8 está para 13, assim como 13 está para 21, aproximadamente.

Em outras palavras, Kepler descobriu que a razão entre dois números de Fibonacci consecutivos converge para a Razão Áurea. Na verdade, ele também descobriu outra propriedade interessante dos números de Fibonacci: que o quadrado de qualquer termo difere no máximo por 1 do produto dos dois termos adjacentes na seqüência. Por exemplo, como a seqüência é: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,..., se olharmos para $3^2 = 9$, isto só difere por 1 do

produto dos dois termos adjacentes a 3, $2 \times 5 = 10$. Igualmente, $13^2 = 169$ difere por 1 de $8 \times 21 = 168$, e assim por diante.

Esta propriedade específica dos números de Fibonacci origina um paradoxo desconcertante apresentado pela primeira vez pelo grande criador de quebra-cabeças matemáticos, Sam Loyd (1841-1911).

Considere o quadrado com oito unidades no lado (área de $8^2 = 64$) na Figura 63. Agora, divida-o em quatro pedaços como indicado. Os quatro pedaços podem ser reagrupados (Figura 64) para formar um retângulo de lados 13 e 5 com área de 65! De onde veio o quadrado unitário extra? A

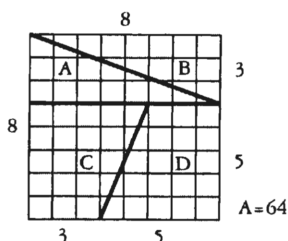


Figura 63

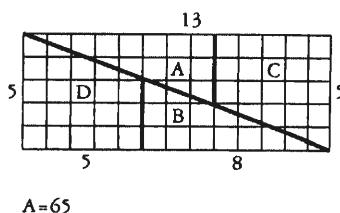


Figura 64

solução do paradoxo está no fato de que as peças, na verdade, não se encaixam perfeitamente ao longo da diagonal do retângulo — existe um espaço estreito (um longo paralelogramo escondido sob a linha grossa que marca a longa diagonal na Figura 64) com a área de um quadrado unitário. Obviamente, 8 é um número de Fibonacci, e seu quadrado ($8^2 = 64$) difere por 1 do produto de seus dois números de Fibonacci adjacentes ($13 \times 5 = 65$) — a propriedade descoberta por Kepler.

Você provavelmente deve ter notado que Kepler se refere à Razão Áurea como "a proporção divina como os geômetras de hoje a chamam". A combinação de elementos racionais com crenças cristãs caracterizara todos os esforços de Kepler. Como um filósofo natural cristão, Kepler considerava seu dever entender o universo juntamente com as intenções do seu criador. Fundindo suas idéias sobre o Sistema Solar com uma forte afinidade com o número 5, que adotou dos pitagóricos, Kepler escreveu a respeito da Razão Áurea o seguinte:

> Uma peculiaridade dessa proporção está no fato de que uma proporção semelhante pode ser construída com a parte maior e o todo; o que era antes a maior passa ser a menor, o que era antes o todo passa a ser a parte maior, e a soma desses dois tem agora a razão do todo. Isto continua indefinidamente; a proporção divina sempre permanece. Acredito que essa proporção geométrica serviu de idéia para o Criador quando Ele introduziu a criação da semelhança usando a semelhança, que também continua indefinidamente. Vejo o número cinco em quase todas as flores que se tornam frutas, isto é, criação, e que existem não por sua própria razão, mas pela fruta que virá a seguir. Quase todas as árvores frutíferas podem ser incluídas aqui; talvez eu deva excluir limões e laranjas; embora não tenha visto suas flores e esteja julgando pela fruta ou baga apenas os que não se dividem em cinco, mas em sete, onze ou nove caroços. Porém, na geometria, o número cinco, que é o pentágono, é construído por meio da proporção divina que eu gostaria [de supor que seja] o protótipo da criação. Além do mais, existe entre o movimento do Sol (ou, como acredito, da Terra) e o de Vênus, que representa o ápice da capacidade geradora da razão de 8 para 13, que, como ouviremos, chega muito perto da proporção divina. Por último, de acordo com Copérnico, a esfera terrestre está a meio caminho entre as esferas Marte e Vênus. Obtém-se a proporção entre elas do dodecaedro e do icosaedro, que, na geometria, derivam da proporção divina; é na Terra, porém, que ocorre o ato da procriação.
>
> Agora vemos como a imagem de um homem e uma mulher sai da proporção divina. Na minha opinião, a propagação das plantas e os atos reprodutivos dos animais estão na mesma razão da proporção geométrica, ou proporção representada por segmentos de linhas, e a proporção expressa aritmética ou numericamente.

Simplesmente, Kepler acreditava mesmo que a Razão Áurea serviu como um instrumento fundamental de Deus na criação do universo. O texto também mostra que Kepler estava a par do surgimento da Razão Áurea e dos números de Fibonacci no arranjo das pétalas das flores.

Os anos relativamente tranqüilos e profissionalmente frutíferos de Kepler em Praga terminaram em 1611 com uma série de desastres. Primeiro, seu filho Friedrich morreu de varíola, depois sua mulher, Bárbara, morreu de

uma febre contagiosa trazida pelas tropas de ocupação austríacas. Finalmente, o imperador Rudolph foi deposto, abdicando da coroa em favor de seu irmão Matthias, que não era conhecido por sua tolerância com os protestantes. Kepler, portanto, foi forçado a partir para Linz, na atual Áustria.

A jóia da coroa do trabalho de Kepler em Linz veio em 1619, com a publicação de seu segundo trabalho importante sobre cosmologia, *Harmonice Mundi* (a harmonia do mundo).

Lembre-se de que a música e a harmonia representavam para Pitágoras e os pitagóricos a primeira evidência de que o fenômeno cósmico poderia ser descrito matematicamente. Somente cordas esticadas em comprimentos com raios correspondentes a números simples produzem tons consoantes. Uma razão de 2:3 soa uma quinta, 3:4, uma quarta, e assim por diante. Espaçamentos harmônicos semelhantes dos planetas foram também considerados produtores de "música das esferas". Kepler estava bastante familiarizado com esses conceitos desde que lera a maior parte do livro do pai de Galileu, Vincenzo Galilei, *Diálogo concernente à música antiga e moderna*, embora rejeitasse algumas das idéias de Vincenzo. Como também acreditava que tinha um modelo completo para o Sistema Solar, Kepler foi capaz de desenvolver pequenas "melodias" para os diferentes planetas (Figura 65).
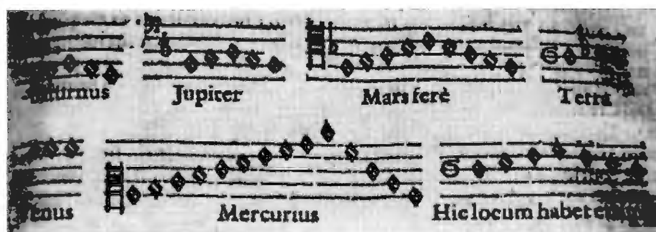


Figura 65

Como Kepler estava convencido de que "antes da origem das coisas, a geometria era coeterna da Mente Divina", boa parte de *A Harmonia do mundo* é dedicada à geometria. Um aspecto desta obra que é particularmente importante para a história da Razão Áurea é o trabalho de Kepler sobre *tiling* (ladrilharia), ou mosaico.

Em geral, a palavra "*tiling*" é usada para descrever um padrão, ou estrutura, que abrange um ou mais formatos ou "*tiles*" (ladrilhos) que pavimentam um plano perfeitamente, sem espaços, tal como os arranjos com mosaicos ou ladrilhos. No Capítulo 8, veremos que alguns conceitos matemáticos presentes em *tiling* são relacionados à Razão Áurea. Embora Kepler não estivesse a par de todas as complexidades da matemática do *tiling*, seu interesse pela relação entre as diferentes formas geométricas e sua admiração pelo pentágono — a mais direta manifestação da "proporção divina" — foram suficientes para levá-lo a um interessante trabalho sobre ladrilharia. Ele estava particularmente interessado na congruência (encaixe) de figuras geométricas como polígonos e sólidos. A Figura 66 mostra um exemplo tirado de *A harmonia do mundo*. Este padrão específico de ladrilharia é composto de quatro formatos, todos relacionados à Razão Áurea: pentágonos, pentagramas, decágonos e decágonos duplos. Para Kepler, isto é uma manifestação da "harmonia", pois *harmonia* em grego significa "um encaixe simultâneo".

É interessante notar que outros homens que desempenharam papéis importantes na história da Razão Áurea antes de Kepler (e cujo trabalho foi descrito em capítulos anteriores) também mostraram interesse por ladrilharia — o matemático do século X Abu'l-Wafa e o pintor Albrecht Dürer. Ambos apresentaram desenhos contendo figuras com simetria quíntupla. (Um exemplo do trabalho de Dürer é visto na Figura 67.)

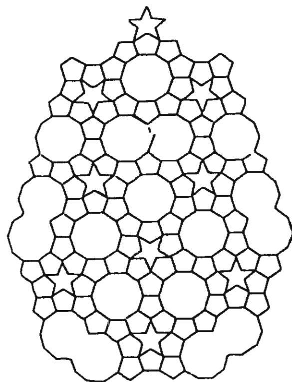


Figura 66

O quinto livro de *A harmonia do mundo* contém o mais importante resultado de Kepler na astronomia — a Terceira Lei de Kepler dos movimentos planetários. Ela representa o ponto culminante de todo o seu angustiante trabalho sobre o tamanho das órbitas dos planetas e seus períodos de revolução em torno do Sol. Vinte e cinco anos de trabalho foram condensados em uma lei inacreditavelmente simples: a razão entre o período ao quadrado e o semi-eixo maior

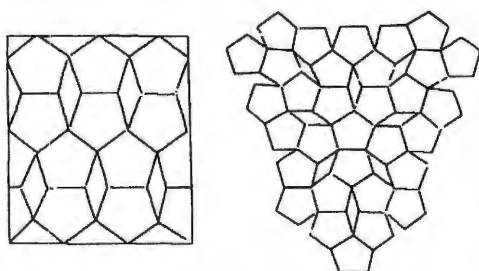


Figura 67

ao cubo é a mesma para todos os planetas (o semi-eixo maior é metade do eixo mais longo da elipse; Figura 62). Kepler descobriu sua lei seminal, que serviu de base para a formulação de Newton da lei universal da gravidade, somente quando *A harmonia do mundo* já estava no prelo. Incapaz de conter sua alegria, anunciou: "Eu roubei as naves douradas dos egípcios para construir um tabernáculo para o meu Deus com elas, muito longe das fronteiras do Egito." A essência da lei naturalmente se baseia na lei da gravidade: a força é maior quanto mais perto do Sol o planeta estiver, de modo que os planetas interiores se movem mais rapidamente para evitar que tomem a direção do Sol.



Figura 68

Em 1626, Kepler se mudou para Ulm e completou as *Tabelas de Rudolphine*, as mais extensas e acuradas tabelas astronômicas produzidas até aquela época. Quando visitei a Universidade de Viena em junho de 2001, meus anfitriões me mostraram, na biblioteca do observatório, a primeira edição das tabelas (hoje há 147 cópias conhecidas). O frontispício do livro (Figura 68), uma representação simbólica da história da astronomia, contém no canto esquerdo inferior o que talvez seja o único auto-retrato de Kepler (Figura 69). Mostra Kepler trabalhando à luz de velas, sob uma espécie de cartaz onde estão citadas suas importantes publicações.



Figura 69

Kepler morreu ao meio-dia, em 15 de novembro de 1630 e foi enterrado em Regensburg. De modo condizente com sua vida turbulenta, as guerras destruíram totalmente seu túmulo, sem deixar vestígio. Por sorte, um esboço da lápide feito por um amigo foi preservado, e contém o epitáfio de Kepler:

Eu costumava medir os céus,
Agora as sombras da Terra eu meço,
Minha mente estava nos céus,
Agora a sombra de meu corpo descansa aqui.

Hoje, a originalidade e produtividade de Kepler são quase incompreensíveis. Deveríamos perceber que este foi um homem que suportou provações inimagináveis, entre elas a perda de três de seus filhos em menos de seis meses entre 1617 e 1618. O poeta inglês John Donne (1572-1631) talvez tenha feito a melhor descrição quando disse que Kepler "recebeu a incumbência de que nenhuma coisa nova poderia ser feita nos céus sem o seu conhecimento".

7

PINTORES E POETAS TÊM A MESMA LICENÇA

A pintura não é um operação estética; é uma forma de mágica projetada como um mediador entre esse estranho mundo hostil e nós.

— PABLO PICASSO (1881-1973)

O Renascimento produziu uma importante mudança de direção na história da Razão Áurea. A partir de então, esse conceito deixou de ficar restrito à matemática. Agora, a Razão Áurea encontrava seu caminho nas explicações dos fenômenos naturais e nas artes.

Já encontramos afirmações de que os projetos arquitetônicos de várias estruturas da Antiguidade, como a Grande Pirâmide e o Partenon, foram baseados na Razão Áurea. Um exame mais atento dessas afirmações revelou, porém, que na maioria dos casos, elas não poderiam ser comprovadas. A introdução da idéia da existência de uma "Proporção Divina" e o reconhecimento geral da importância da matemática para a perspectiva tornaram mais concebível que alguns artistas pudessem começar a usar métodos com base científica em geral e a Razão Áurea em particular em seus trabalhos. O pintor e desenhista contemporâneo David Hockney afirma em seu

livro *Secret Knowledge* (Conhecimento secreto), de 2001, por exemplo, que, a partir de 1430, alguns artistas começaram a usar secretamente aparelhos parecidos com câmeras, incluindo lentes, espelhos côncavos e a câmara escura, para ajudá-los a criar pinturas realistas. Mas será que os artistas realmente usaram a Razão Áurea? E se usaram, a aplicação da Razão Áurea estava restrita às artes visuais ou penetrou em outras áreas de tentativas artísticas?

A GEOMETRIA SECRETA DO ARTISTA?

Muitas das afirmações relativas ao emprego da Razão Áurea na pintura estão diretamente associadas às supostas propriedades estéticas do Retângulo Áureo. Discutirei a veracidade (ou falsidade) desse cânone estético mais adiante neste capítulo. Mas, agora, vou me concentrar na questão mais simples: "será que algum pintor renascentista ou pré-renascentista realmente

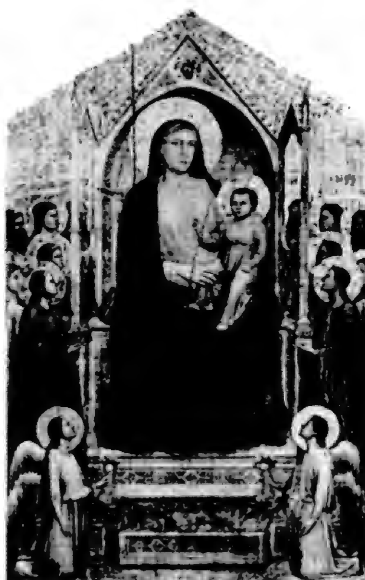


Figura 70

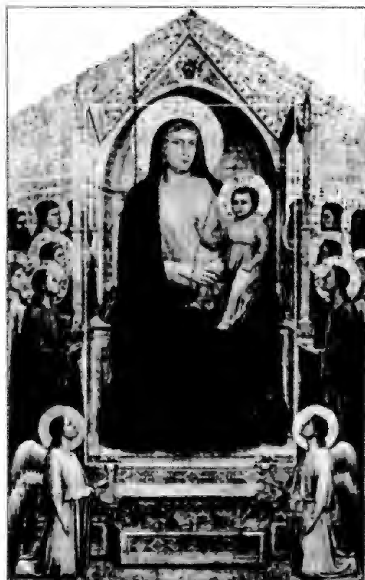


Figura 71

baseou sua composição artística no Retângulo Áureo? Nossa tentativa de responder a esta pergunta nos leva de volta ao século XIII.

A "Madonna Ognissanti" (também conhecia como a "Madona em Glória", Figura 70, atualmente na Galeria Uffizi, em Florença) é um dos maiores painéis do famoso pintor e arquiteto italiano Giotto di Bondone (1267-1337). Feita entre 1306 e 1310, a pintura mostra uma Virgem semi-sorridente, entronizada, acariciando o joelho da Criança. A Madona e a Criança estão cercadas de anjos e santos arrumados em algum tipo de "hierarquia" perspectiva. Muitos livros e artigos sobre a Razão Áurea repetem a afirmação de que tanto a pintura como um todo quanto as figuras centrais podem ser inscritas perfeitamente em Retângulos Áureos (Figura 71).

Uma afirmação semelhante é feita a respeito de outras duas pinturas com o mesmo tema geral: a "Madonna Rucellai" (pintada em 1285) pelo grande pintor de Siena Duccio di Buoninsegna, conhecido como Duccio (c. 1255-1319), e a "Madonna Santa Trinita", do pintor florentino Cenni di Pepo, conhecido como Cimabue (c. 1240-1302). Como se fosse obra do destino, atualmente as três pinturas estão penduradas na mesma sala na Galeria Uffizi, em Florença. As dimensões das Madonas "Ognissanti", "Rucellai" e "Santa Trinita" dão razões entre altura e largura de 1,59, 1,55 e 1,73, respectivamente. Embora os três números não estejam muito distantes da Razão Áurea, dois deles estão, na verdade, mais próximos da razão simples 1,6 do que do número irracional Φ. Este fato poderia indicar (se é que indica) que os artistas seguiram a sugestão vitruviana de uma proporção simples, a razão de dois números inteiros em vez da Razão Áurea. O retângulo interno no quadro "Madonna Ognissanti" (Figura 71) nos deixa com uma impressão igualmente ambígua. Não apenas as bordas do retângulo são geralmente desenhadas com linhas grossas (por exemplo, no charmoso livro de Trudi Hammel Garland, *Fibonaccis fascinantes*), tornando qualquer medição bastante imprecisa, mas também o lado horizontal superior está colocado de maneira um tanto arbitrária.

Relembrando os perigos de termos de confiar somente em dimensões medidas, podemos nos perguntar se existe qualquer outro motivo para sus-

peitarmos que esses três artistas tenham desejado incluir a Razão Áurea nas suas pinturas. A resposta a essa questão parece ser negativa, a menos que eles tenham sido levados a essa razão por alguma preferência estética inconsciente (uma possibilidade que será analisada mais adiante no capítulo). Lembre-se de que as três Madonas foram pintadas mais de dois séculos antes que a publicação de *A Proporção Divina* tivesse divulgado a razão para um público maior.

O pintor e escritor francês Charles Bouleau manifesta uma opinião diferente no seu livro *A geometria secreta do pintor*, de 1963. Sem fazer referência específica a Giotto, Duccio ou Cimabue, Bouleau afirma que o livro de Pacioli representou o fim de uma era em vez de seu começo. Ele afirma que *A Proporção Divina* apenas "revela o pensamento de longos séculos de tradição oral" durante os quais a Razão Áurea "era considerada expressão da beleza perfeita". Se esse fosse realmente o caso, então Cimabue, Duccio e Giotto poderiam ter de fato decidido usar esse padrão aceito de perfeição. Infelizmente, não encontro qualquer evidência que sustente a afirmação de Bouleau. Pelo contrário, a história documentada da Razão Áurea não é coerente com a idéia de que essa proporção tenha sido particularmente reverenciada por artistas nos séculos que antecederam a publicação do livro de Pacioli. Além disso, todos os estudos sérios sobre as obras dos três artistas feitos por especialistas em arte (por exemplo, *Giotto*, de Francesca Flores D'Arcais; *Cimabue*, de Luciano Bellosi) não dão qualquer indicação de que esses pintores possam ter usado a Razão Áurea — essa afirmação aparece apenas nos escritos de entusiastas do Número Áureo e se baseia apenas na dúbia evidência das dimensões medidas.

Outro nome que invariavelmente aparece em quase todas as afirmações sobre o aparecimento da Razão Áurea é o de Leonardo da Vinci. Alguns autores atribuem até mesmo a invenção do nome "Proporção Divina" a Leonardo. A discussão geralmente se concentra em cinco trabalhos do mestre italiano: "Virgem dos Rochedos", o desenho de "uma cabeça de ancião" e a famosa "Mona Lisa". Vou ignorar a Mona Lisa aqui por duas razões. Ela foi tema de tantos livros de especulações contraditórias de estudiosos



Figura 72



Figura 73

e populares que é praticamente impossível se chegar a qualquer conclusão inequívoca. E supõe-se que a Razão Áurea deveria ser encontrada nas dimensões de um retângulo em torno do rosto da Mona Lisa. Na falta de qualquer indicação clara (e documentada) do lugar exato onde esse retângulo deveria ser desenhado, essa idéia representa apenas outra oportunidade para malabarismos numéricos. No entanto, voltarei ao tópico mais geral das proporções em rostos nas pinturas de Leonardo ao dicutir o desenho "uma cabeça de ancião".

O caso das duas versões da "Virgem dos Rochedos" (uma no Louvre, em Paris, Figura 72, e a outra na National Gallery, em Londres, Figura 73) não é particularmente convincente. A razão entre a altura e a largura da pintura que se pensa que foi executada primeiro (Figura 72) é de cerca de 1,64, e a da outra, de 1,58, ambas razoavelmente próximas de Φ, mas próximas também da razão simples 1,6.

A datação e a autenticidade das duas "Virgem dos Rochedos" também causam uma interessante reviravolta nas afirmações acerca da presença da Razão Áurea. Especialistas que estudaram as duas pinturas concluíram que, sem

dúvida, a versão do Louvre foi feita inteiramente pela mão de Leonardo, enquanto a versão da National Gallery pode ter sido um esforço conjunto e é ainda motivo de debates. Acredita-se que a versão do Louvre seja um dos primeiros trabalhos que Leonardo produziu em Milão, provavelmente entre 1483 e 1486. Por outro lado, geralmente se supõe que a pintura da National Gallery foi concluída por volta de 1506. O motivo pelo qual essas datas podem ter alguma importância é que Leonardo encontrou Pacioli pela primeira vez em 1496, na Corte de Milão. O septuagésimo primeiro capítulo de *Divina* (o final da primeira parte do livro) foi, nas palavras de Pacioli: "Terminado nesse dia de 14 de dezembro, em Milão, em nosso tranqüilo ano de 1497." A primeira versão (e aquela cuja autenticidade é certa) da "Virgem dos Rochedos" foi, portanto, concluída cerca de dez anos antes que Leonardo tivesse a oportunidade de ouvir diretamente de fonte segura sobre a "proporção divina". Assim, a afirmação de que Leonardo usava a Razão Áurea na "Virgem dos Rochedos" significa acreditar que o artista adotou essa proporção antes mesmo de começar sua colaboração com Pacioli. Embora isto não seja impossível, não existe evidência que sustente esta interpretação.

Qualquer uma das versões da "Virgem dos Rochedos" representa uma das obras-primas mais completas de Leonardo. Talvez em nenhuma outra pintura ele tenha aplicado melhor sua fórmula poética: "cada corpo opaco é cercado e vestido na sua superfície com sombras e luz". As figuras na pintura literalmente se abrem à participação emocional do espectador. A afirmação de que essas pinturas extraem qualquer parte de sua força da simples razão entre suas dimensões banaliza desnecessariamente o gênio de Leonardo. Não nos deixemos enganar. O sentimento de assombro que experimentamos quando olhamos a "Virgem dos Rochedos" tem pouco a ver com o fato de as dimensões estarem ou não em uma Razão Áurea.

Há uma incerteza semelhante a respeito do inacabado "São Jerônimo" (Figura 74; atualmente no museu do Vaticano). Não só a pintura data de 1483, muito antes da ida de Pacioli para Milão, como a afirmação feita em alguns livros (por exemplo, em David Bergamini e os editores da *Life Magazine's Mathematics*) de que "um Retângulo Áureo se encaixa tão bem

em volta de São Jerônimo" exige um excesso de imaginação. Na verdade, os lados do retângulo deixam de fora o corpo (especialmente no lado esquerdo) e a cabeça inteiramente, enquanto o braço se estende muito além do lado do triângulo.

O último exemplo de um possível uso da Razão Áurea por Leonardo é o desenho de "uma cabeça de ancião" (Figura 75; o desenho está atualmente na Galleria dell'Accademia, em Veneza). O perfil e o diagrama de proporções foram desenhados a lápis por volta de 1490. Dois estudos de cavaleiros feitos em giz vermelho, que são associados à "Batalha de Anghiari", de Leonardo, foram acrescentados à mesma página por volta de 1503-1504. Embora a grade superposta deixe muito poucas dúvidas de que Leonardo estava realmente interessado nas várias proporções da face, é muito difícil extrair qualquer conclusão definitiva desse estudo. O retângulo no meio, à esquerda, por exemplo, é aproximadamente um retângulo áureo, mas as linhas estão desenhadas de modo tão grosseiro, que não podemos ter certeza. Ainda assim, este desenho provavelmente é o que mais se aproxima de uma demonstração de que Leonardo usou retângulos para determinar as dimen-



Figura 74



Figura 75

sões nas suas pinturas e que pode até ter considerado a aplicação da Razão Áurea na sua arte.

O interesse de Leonardo pelas proporções da face pode ter outra manifestação interessante. Em um artigo publicado em 1995, na *Scientific American*, a historiadora da arte e artista da computação gráfica Lillian Schwarz apresentou uma especulação interessante. Schwarz afirmou que, na falta de seu modelo para a "Mona Lisa", Leonardo usou suas próprias características faciais, para completar a pintura. A sugestão de Schwarz foi baseada em uma comparação, auxiliada por computador, entre várias dimensões no rosto de Mona Lisa e as dimensões respectivas em um desenho feito com giz vermelho que é considerado por muitos (mas não por todos) o único auto-retrato de Leonardo. Entretanto, como outros analistas de arte destacaram a semelhança nas proporções pode simplesmente refletir o fato de que Da Vinci usou a mesma fórmula de proporção (que pode ou não ter incluído a Razão Áurea) nos dois retratos. De fato, a própria Schwarz observa que, mesmo nos seus grotescos — uma coleção de rostos bizarros com queixos, narizes, bocas e testas bastante exagerados —, Leonardo usou as mesmas proporções faciais da "cabeça do ancião".

Ainda que existam sérias dúvidas sobre a utilização pelo próprio Leonardo — que não era apenas amigo de Pacioli, mas também o ilustrador de *Divina* — da Razão Áurea nas suas pinturas, será que isso significa que nenhum outro artista jamais a usou? Definitivamente, não. Com a onda de trabalhos acadêmicos sobre a Razão Áurea no fim do século XIX, os artistas também começaram a tomar conhecimento. Mas antes de analisarmos os artistas que usaram a Razão Áurea, outro mito ainda precisa ser descartado.

Apesar de muitas afirmações em contrário, o pontilhista francês Georges Seurat (1859-1891) provavelmente não usou a Razão Áurea em suas pinturas. Seurat estava interessado na visão da cor e na combinação das cores, e usou a técnica do pontilhismo (pontos múltiplos) para se aproximar o máximo possível da característica cintilante, vibratória, da luz. Ele também estava preocupado, no fim da vida, com o problema de expressar emoções específicas por meios pictóricos. Em uma carta escrita em 1890, Seurat descreve sucintamente algumas de suas opiniões:

> Arte é harmonia. Harmonia é a analogia de contradições e de semelhanças, em tom, sombra, linha, julgado pelo dominante entre eles e sob a influência de um jogo de luz, em arranjos que são alegres, leves, tristes. Contradições são..., com respeito à linha, aqueles que formam um ângulo reto... Linhas alegres são linhas acima da horizontal;... calma é horizontal; linhas tristes na direção para baixo.

Seurat usou explicitamente essas idéias em "The Parade of a Circus" (algumas vezes chamado de "The Side Show"; Figura 76; atualmente no Museu de Arte Metropolitan, em Nova York). Observe, especificamente, o ângulo reto formado pela balaustrada e pela linha vertical à direita, no meio da pintura. A composição inteira é baseada em princípios que Seurat adotou do livro do teórico da arte David Sutter, *La philosophie des Beaux-Arts appliquée à la peinture* (A filosofia das belas-artes aplicada à pintura, 1870). Sutter escreve: "Quando o dominante é horizontal, uma sucessão de objetos verticais pode ser colocada nela, porque a série combinará com a linha horizontal".

Os aficionados pela Razão Áurea freqüentemente apresentam análises de "The Parade" (e também de outras pinturas, como "The Circus") para

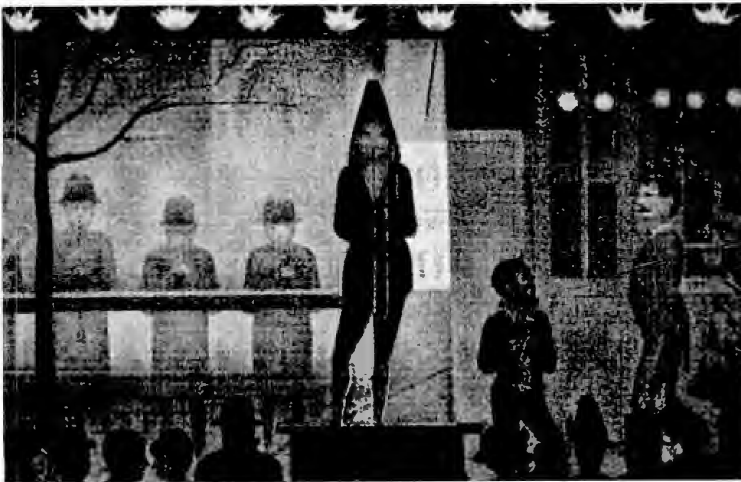


Figura 76

"provar" o uso de Φ. Até mesmo no belo livro *Mathematics*, de Bergamini e dos editores da *Life Magazine*, encontramos: "'La Parade', pintada no estilo multipontilhado característico do impressionista francês Georges Seurat, contém numerosos exemplos de Proporções Áureas." O livro até vai mais longe, com uma citação (atribuída a "um especialista em artes") de que Seurat "atacou cada quadro com a Seção Áurea". Infelizmente, essas afirmações são infundadas. Esse mito foi propagado pelo prelado romeno e escritor Matila Ghyka (1881-1965), que era também o "especialista em artes" citado por Bergamini. Ghyka publicou dois livros influentes, *Esthétique des proportions dans la nature et dans les arts* (Estética das proporções na natureza e nas artes, 1927) e *Le Nombre d'Or: Rites et rythmes pytagoriciens dans le développement de la civilisation occidentale* (O Número Áureo: Ritos e ritmos pitagóricos no desenvolvimento da civilização ocidental; 1931). Os dois livros são compostos de interpretações semimísticas da matemática. Ao lado de descrições corretas das propriedades matemáticas da Razão Áurea, o livro contém uma série de exemplos anedóticos imprecisos sobre a ocorrência da Razão Áurea nas artes (por exemplo, no Partenon, em templos egípcios etc.). Os livros foram quase inexplicavelmente influentes.

Especificamente, em relação a "A Parada", embora seja verdade que a linha horizontal esteja dividida em proporções próximas da Razão Áurea (na verdade, na razão simples de oito quintos), a vertical não está. Uma análise da composição inteira desta e de outras pinturas de Seurat, e também de quadros do pintor simbolista Pierre Puvis de Chavannes (1824-1898), chegou a levar um defensor da Razão Áurea como o pintor e escritor Charles Bouleau a concluir que "eu não acho que podemos, sem forçar a evidência, ver as composições dele [Puvis de Chavannes] como baseadas na Razão Áurea. O mesmo se aplica a Seurat". Uma análise detalhada, feita em 1980 por Roger Herz-Fischler, de todos os textos, esboços e pinturas de Seurat chegou à mesma conclusão. Além disso, o matemático, filósofo e crítico de arte Charles Henry (1859-1926) afirmou com convicção em 1890 que a Razão Áurea era "completamente ignorada pelos artistas contemporâneos".

Quem, então, usou a Razão Áurea em pinturas reais ou na teoria da

pintura? O primeiro artista proeminente e teórico da arte a utilizar a razão provavelmente foi Paul Sérusier (1864-1927). Sérusier nasceu em Paris, e depois de estudar Filosofia, entrou para a famosa escola de arte Académie Julian. Um encontro com os pintores Paul Gaugin e Émile Bernard o atraiu para o expressivo uso da cor e para as visões simbolistas deles. Junto com os pintores pós-impressionistas Pierre Bonnard, Édouard Vuillard, Maurice Denis e outros, ele fundou o grupo chamado Nabis, da palavra hebraica que significa "profetas". O nome foi inspirado pela postura meio séria, meio burlesca do grupo em relação ao seu novo estilo como uma espécie de iluminação religiosa. O compositor Claude Debussy também estava associado ao grupo. Sérusier provavelmente ouviu a respeito da Razão Áurea pela primeira vez durante uma de suas visitas entre (1896 e 1903) a um amigo, o pintor holandês Jan Verkade (1868-1946). Verkade era um noviço no mosteiro beneditino de Beuron, no sul da Alemanha. Ali, grupos de monges pintores estavam fazendo composições religiosas bastante enfadonhas baseadas em "medidas sagradas", seguindo uma teoria do padre Didier Lenz. Segundo a teoria do padre Lenz, as grandes obras de arte da Antiguidade (por exemplo, a Arca de Noé, trabalhos egípcios etc.) foram baseadas em entidades geométricas simples, como o círculo, o triângulo equilátero e o hexágono. Sérusier achou cativante o charme dessa teoria e escreveu a Verkade: "como você pode imaginar, conversamos bastante a respeito de suas medidas". O pintor Maurice Denis (1870-1943) escreveu notas biográficas sobre Sérusier, com quem ele aprendeu que essas "medidas" empregadas pelo padre Lenz incluíam a Razão Áurea. Embora Sérusier admita que seus estudos iniciais da matemática de Beuron não tenham sido "tão fáceis", a Razão Áurea e a história de sua possível associação com a Grande Pirâmide e com obras de arte gregas entraram também no importante livro de teoria da arte de Sérusier *L'ABC de la Peinture* (O ABC da pintura).

Embora o interesse de Sérusier pela Razão Áurea pareça ter sido mais filosófico do que prático, ele realmente usou essa proporção em algumas de suas obras, principalmente para "verificar, e ocasionalmente checar, suas invenções de formas e suas composições".



Figura 77

Segundo Sérusier, o conceito de Razão Áurea se propagou em outros círculos artísticos, especialmente no cubista. O nome "cubismo" foi cunhado pelo crítico de arte Louis Vauxcelles (que, por sinal, também foi responsável por "expressionismo" e "fauvismo"), depois de ver uma exposição das obras de Georges Braque em 1908. O movimento foi inaugurado pela pintura de Picasso "Les Demoiselles d'Avignon" e pelo "Nu" de Braque. Numa reação contra o uso passional das cores e formas no expressionismo, Picasso e Braque desenvolveram um estilo austero, quase monocromático, que rejeitava qualquer assunto que pudesse evocar associações emocionais. Objetos como instrumentos musicais e até mesmo figuras humanas foram dissecados em planos geométricos facetados, que eram então combinados em perspectivas cambiantes. Esta análise de formas sólidas com o objetivo de revelar a estrutura era bastante passível de uso de conceitos geométricos como a Razão Áurea. De fato, alguns dos primeiros cubistas, como Jacques Villon e seus irmãos Marcel e Raymond Duchamp-Villon, juntamente com Albert Gleizes e Francis Picabia, organizaram em Paris, em outubro de 1912, uma exposição intitulada "Section d'Or" ("A Seção Áurea"). Apesar do nome bastante sugestivo, nenhuma das pinturas expostas incluia realmente a Seção Áurea como base de sua composição. Na verdade, os organizadores escolheram o nome simplesmente para ressaltar seu interesse geral por questões que relacionavam a arte com a ciência e a filosofia. Ainda assim, alguns cubistas, como o pintor espanhol Juan Gris (1887-1927) e o escultor Jacques (Chaim Jacob) Lipchitz (1891-1973), usaram a Razão Áurea em alguns de seus trabalhos tardios. Lipchitz escreveu: "Naquele momento, eu estava muito interessado em teorias de proporções matemáticas, como os outros cubistas, e tentei aplicá-las às minhas esculturas. Todos nós tínhamos uma

grande curiosidade pela idéia de uma regra áurea ou Seção Áurea, um sistema que se acreditava que condicionava a arte e a arquitetura da antiga Grécia". Lipchitz ajudou Juan Gris na construção da escultura "Arlequin" (atualmente no Museu de Arte de Filadélfia; Figura 77), na qual os dois artistas usaram o triângulo de Kepler (que se baseia na Razão Áurea; veja Figura 61) para obter as proporções desejadas.



Figura 78

Outro artista que usou a Razão Áurea no início da década em 1920 foi o pintor italiano Gino Severini (1883-1966). Severini tentou, em seu trabalho, conciliar os objetivos um tanto conflitantes do futurismo e do cubismo. O futurismo representava o esforço de um grupo de intelectuais italianos da literatura, das artes visuais, do teatro, da música e do cinema para provocar um rejuvenescimento cultural na Itália. Nas palavras de Severini: "Preferimos concentrar nossa atenção em coisas em movimento, pois nossa moderna sensibilidade é particularmente capaz de compreender a idéia de velocidade". O primeiro manifesto dos pintores futuristas foi assinado em 1910 e incitava rigorosamente os jovens artistas italianos a "desprezarem profundamente todas as formas de imitação". Embora ele próprio ainda fosse um futurista, Severini encontrou no cubismo uma "noção de medida" que se encaixava na sua ambição de "fazer, por meio da pintura, um objeto com a mesma perfeição artística de um marceneiro fazendo móveis". Esta luta pela perfeição geométrica levou Severini a usar a Seção Áurea nos seus desenhos preliminares de várias pinturas (por exemplo, "Maternidade", atualmente em uma coleção particular em Roma; Figura 78).

A pintora cubista russa Maria Vorobëva, conhecida como Marevna, dá um exemplo interessante do papel da Razão Áurea na arte cubista. O livro de Marevna, *A Vida com os Pintores de La Ruche*, de 1974, é um relato fascinante das vidas e das obras de seus amigos — um grupo que incluía os pintores

Picasso, Modigliani, Soutine, Rivera (com quem ela teve uma filha) e outros na Paris dos anos 1920. Embora Marevna não dê qualquer exemplo específico e alguns de seus comentários históricos sejam imprecisos, o texto insinua que Picasso, Rivera e Gris usaram a Razão Áurea como "outra maneira de dividir planos, que é mais complexa e atrai as mentes experientes e inquisitivas".

Outro teórico da arte que teve grande interesse pela Razão Áurea no início do século XX foi o americano Jay Hambidge (1867-1924). Em uma série de artigos e livros, Hambidge definiu dois tipos de simetria na arte clássica e moderna. Uma, que chamou de "simetria estática", era baseada em figuras regulares, como o quadrado e o triângulo equilátero, e supostamente produzia arte sem vida. A outra, que ele chamou de "simetria dinâmica", tinha a Razão Áurea e a espiral logarítmica em papéis de destaque. A tese básica de Hambidge era que o uso da "simetria dinâmica" no desenho resultava em arte vibrante e tocante. Hoje em dia, poucos levam suas idéias a sério.

Um dos defensores mais vigorosos da aplicação da Razão Áurea na arte e na Arquitetura foi o famoso arquiteto e pintor suíço-francês Le Corbusier (Charles-Édouard Jeanneret, 1887-1965).

Jeanneret nasceu em La Chaux-de-Fonds, na Suíça, onde estudou arte e gravura. Seu pai trabalhava no ramo de relógios como esmaltador, enquanto sua mãe foi uma pianista e professora de música que incentivava o filho a adquirir destreza musical e se dedicar a buscas mais abstratas. Ele começou seus estudos de arquitetura em 1905 e acabou se tornando uma das figuras mais influentes da arquitetura moderna. No inverno de 1916-1917, Jeanneret se mudou para Paris, onde conheceu Amédée Ozenfant, que era bem relacionado no *haut monde* parisiense de artistas e intelectuais. Por intermédio de Ozenfant, Jeanneret conheceu os cubistas e foi forçado a lidar com sua herança. Especificamente, ele absorveu um interesse por sistemas proporcionais e seu papel na estética de Juan Gris. No outono de 1918, Jeanneret e Ozenfant fizeram uma exposição conjunta na Galérie Thomas. Mais precisamente, dois quadros de Jeanneret foram pendurados ao lado de muitos outros quadros de Ozenfant. Eles chamavam a si mesmos de "puristas" e intitularam seu catálogo *Après le Cubisme* (Após o cubismo).

Purismo invocava Piero della Francesca e a teoria da estética platônica na sua afirmação de que "a obra de arte não precisa ser acidental, excepcional, impressionista, inorgânica, protestatória, pitoresca, mas, ao contrário, generalizada, estática, expressiva do invariante".

Jeanneret só adotou o nome "Le Corbusier" (cooptado de ancestrais do seu lado materno chamados Lecorbesier) aos trinta e três anos, quando estava bem instalado em Paris e confiante em seu futuro caminho. Era como se ele quisesse, basicamente, reprimir seus primeiros esforços hesitantes e estimular o mito de que seu gênio arquitetônico floresceu de repente, chegando à plena maturidade.

Inicialmente, Le Corbusier manifestou opiniões um tanto céticas e até mesmo negativas, sobre a aplicação da Razão Áurea na arte, alertando contra a "troca do misticismo da sensibilidade pela Seção Áurea". De fato, uma análise completa dos projetos arquitetônicos e das pinturas "puristas" feita por Roger Herz-Fischler mostra que, antes de 1927, Le Corbusier nunca usou a Razão Áurea. Esta situação mudou drasticamente após a publicação do influente livro de Matila Ghyka *Esthétique des proportions dans la nature et dans les arts* (A estética de proporções na natureza e nas artes), e seu *Número Áureo, Ritos e ritmos pitagóricos* (1931) apenas reforçou ainda mais os aspectos místicos de Φ. A fascinação de Le Corbusier por *Aesthetics* e pela Razão Áurea tinha duas origens. Por um lado, era uma conseqüência de seu interesse pelas formas e estruturas básicas por trás dos fenômenos naturais. Por outro, vindo de uma família que incentivava a educação musical, Le Corbusier podia apreciar a ânsia pitagórica por uma harmonia alcançada por razões de números. Ele escreveu: "Mais que esses trinta anos passados, a seiva da matemática fluiu através das veias de meu trabalho, seja como arquiteto, seja como pintor, pois a música está sempre presente dentro de mim." A busca de Le Corbusier por uma proporção padronizada culminou na introdução de um novo sistema proporcional chamado "Modulor".

Supunha-se que o Modulor forneceria "uma medida harmônica para a escala humana, universalmente aplicável na arquitetura e na mecânica". Esta citação, na verdade, nada mais é do que uma outra versão do famoso ditado de

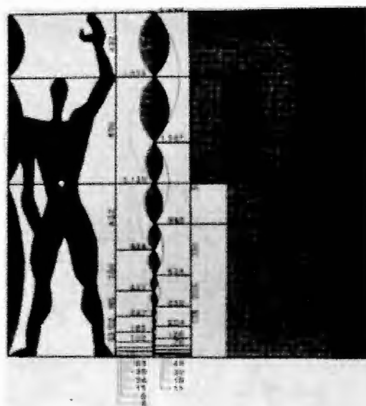


Figura 79

Protágoras, do século V a.C., "O homem é a medida de todas as coisas". Conseqüentemente, no espírito do homem vitruviano (Figura 53) e do compromisso filosófico geral de descobrir um sistema de proporções equivalente ao da criação natural, o Modulor era baseado nas proporções humanas (Figura 79).

Um homem medindo seis pés (cerca de 1,83 m), parecendo um pouco com o familiar logotipo do "Homem do Michelin", com seu braço erguido (até uma altura de 2,26 m), foi inserido em um quadrado (Figura 80). A razão entre a altura do homem (183 cm) e a altura de seu umbigo (no ponto médio de 113 cm) foi escolhida precisamente em uma Razão Áurea. A altura total (dos pés até o braço levantado) também estava dividida em uma Razão Áurea (em 140 cm e 86 cm) no nível do pulso de um braço solto para baixo. Os dois quocientes (113/70) e (140/86) foram subdivididos em dimensões ainda menores de acordo com a série de Fibonacci (cada número sendo igual à soma dos dois anteriores; Figura 81). Na versão final do Modulor (Figuras 79 e 81), duas escalas de dimensões de Fibonacci interespiralantes foram, portanto, introduzidas (as "séries vermelha e azul").

Le Corbusier sugeriu que o Modulor daria proporções harmoniosas a tudo, de tamanhos de gabinetes e maçanetas a edifícios e espaços urbanos. Em um mundo com uma crescente necessidade de produção em massa, esperava-se que o Modulor fornecesse um modelo de padronização. Dois livros de Le Corbusier, *Le Modulor* (publicado em 1948) e *Modulor II* (1955), receberam grande atenção dos estudiosos dos círculos da arquitetura e eles continuaram a aparecer em qualquer discussão sobre proporção. Le Corbusier se orgulhava muito de ter tido a oportunidade de apresentar o Modulor até mesmo a Albert Einstein, durante um encontro em Princeton em 1946. Descrevendo este acontecimento, ele diz: "Eu me expressei mal, expliquei mal o 'Modulor', fiquei atolado no pântano de 'causa e efeito'." Mesmo assim, ele recebeu uma

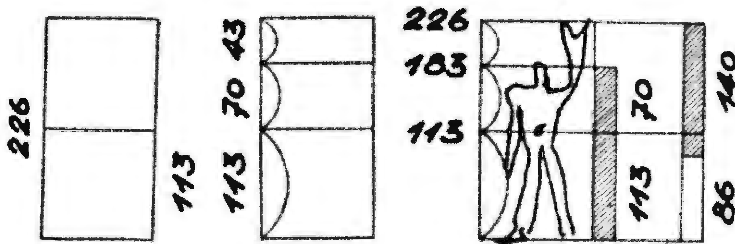


Figura 80

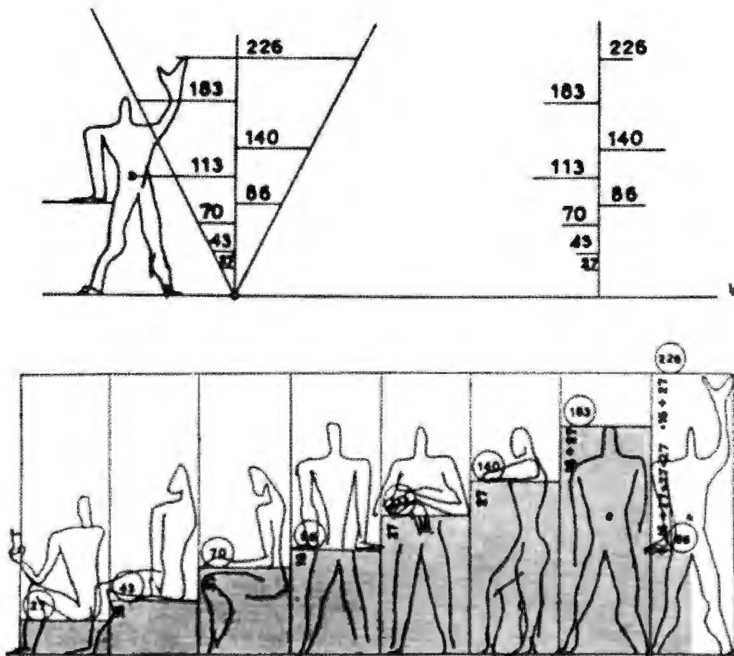


Figura 81

carta de Einstein, na qual o grande homem disse isto sobre o Modulor: "É uma escala de proporções que torna o ruim difícil e o bom fácil".

Le Corbusier traduziu sua teoria do Modulor na prática em muitos de seus projetos. Por exemplo, em suas notas para o impressionante *layout* urbano de Chandigarh, na Índia, que incluía quatro grandes prédios gover-

namentais — um Parlamento, uma Suprema Corte e dois museus —, encontramos: "Mas, é claro, o Modulor veio no momento de dividir a área da janela... Na seção geral do prédio destinada a proporcionar proteção contra o sol aos escritórios e tribunais, o Modulor dará unidade estrutural a todos os lugares. No desenho da fachada, o Modulor (*texturique*) irá aplicar sua série vermelha e azul dentro dos espaços já fornecidos pela estrutura."

Le Corbusier certamente não foi o último artista a ficar interessado na Razão Áurea, mas a maioria depois dele ficou mais fascinada pelos atributos matemático-filosófico-históricos do que pela suas supostas propriedades estéticas. Por exemplo, o artista abstrato britânico Anthony Hill usou uma série de Fibonacci em seu "Constructional Relief", de 1960 (Figura 82). Do mesmo modo, o pintor e escultor contemporâneo israelense Igael Tumarkin incluiu deliberadamente a fórmula do valor de Φ ($\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$) em uma de suas pinturas.

Um artista que transformou a seqüência de Fibonacci em um importante ingrediente de sua arte foi o italiano Mario Merz. Ele nasceu em Milão em 1925, e em 1967 aderiu ao movimento artístico chamado Arte Povera (Arte pobre), que incluía os artistas Michelangelo Pistoletto, Luciano Fabro e Jannis Kounellis. O nome do movimento (cunhado pelo crítico Germano Celant)

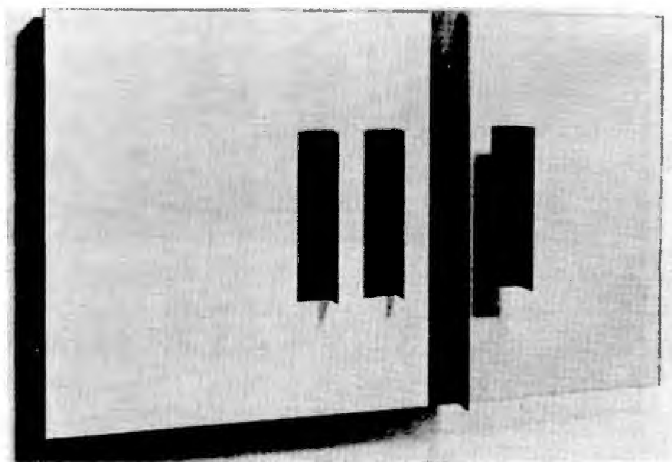


Figura 82

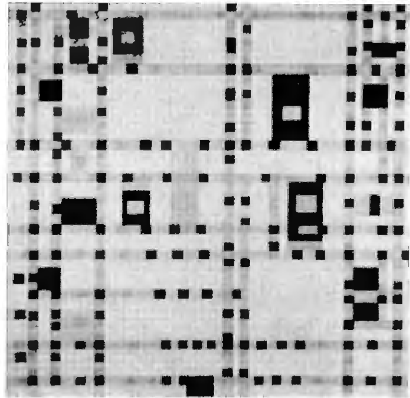


Figura 83

era derivado do desejo de seus membros de usar materiais simples, do cotidiano, protesto contra o que eles consideravam uma sociedade desumanizada, consumista. Merz começou a usar a seqüência de Fibonacci em 1970, em uma série de trabalhos "conceituais" que incluíam os números na seqüência ou várias espirais. O desejo de Merz de utilizar números de Fibonacci se baseava no fato de que a seqüência estava por trás de vários padrões de crescimento na natureza. Em um trabalho de 1987 intitulado "Onda d'urto" (Onda de choque), ele tem uma longa fila de pilhas de jornais com os números de Fibonacci brilhando em luz néon azul acima das pilhas. O trabalho "Fibonacci Nápoles" (de 1970) consistia em dez fotografias de operários de fábrica, agrupados em números de Fibonacci, de uma só pessoa até um grupo de cinqüenta e cinco (o décimo número de Fibonacci).

Afirmações falsas a respeito de artistas que supostamente usaram a Razão Áurea continuaram a pulular quase como cogumelos depois da chuva. Uma dessas afirmações merece atenção especial, pois é repetida constantemente.

O pintor holandês Piet Mondrian (1872-1944) é mais conhecido pelo seu estilo geométrico, não-objetivo, que ele chamou de "neoplasticismo". Especificamente, boa parte de sua arte é caracterizada por composições que envolvem apenas linhas verticais e horizontais, retângulos e quadrados, empregando apenas cores primárias (e, às vezes, preto e cinza) contra um fundo branco, como em "Broadway Boogie-Woogie" (Figura 83; No Museu de Arte Moderna de Nova York). Linhas curvas, tridimensionalidade e representações realísticas foram completamente eliminadas de seu trabalho.

Talvez não surpreenda o fato de que as composições geométricas de Mondrian provocaram muita especulação de Numeristas Áureos. Em *Mathematics*, David Bergamini admite que o próprio Mondrian "era vago a respeito do projeto de seus quadros", mas, mesmo assim, afirma que a abs-

tração linear "Place de la Concorde" incorpora Retângulos Áureos superpostos. Charles Bouleau foi muito mais ousado em *The Painter's Secret Geometry* (A geometria secreta do pintor), asseverando que "os pintores franceses nunca se atreveram a ir tão longe na geometria pura e no uso estrito da seção áurea como fez o holandês frio e impiedoso Piet Mondrian". Bouleau afirma ainda que, em "Broadway Boogie-Woogie", "as horizontais e verticais que compõem essa pintura estão quase todas em uma Razão Áurea". Com tantas linhas para escolher nessa pintura, não deveria surpreender que várias possam estar aproximadamente nas separações certas. Tendo consumido muito tempo lendo as análises mais sérias sobre a obra de Mondrian e não tendo encontrado qualquer menção à Razão Áurea, fiquei bastante intrigado com a questão: Mondrian realmente usou a Razão Áurea nas suas composições ou não? Como último recurso, resolvi recorrer ao verdadeiro especialista — Yves-Alain Bois, da Universidade Harvard, que foi co-autor do livro *Mondrian*, que acompanhou a grande exposição retrospectiva da obra do artista em 1999. A resposta de Bois foi bastante categórica: "Até onde sei, Mondrian nunca usou um sistema de proporção (se se excetuarem as redes modulares que ele pintou em 1918-1919, mas, neste caso, o sistema é deduzido do formato das próprias pinturas: elas se dividem em unidades de 8 × 8)." Acrescenta Bois: "Eu me lembro também vagamente de uma observação de Mondrian zombando das computações aritméticas em relação à sua obra." E concluiu: "Acho que a Seção Áurea é uma tentativa de desviar o assunto com respeito a Mondrian."

Toda essa história intrincada nos deixa com uma pergunta desconcertante. Tirando a curiosidade intelectual, por que motivo tantos artistas chegariam sequer a pensar no emprego da Razão Áurea em suas obras? Será que essa razão, como manifestada, por exemplo, no Retângulo Áureo, realmente contém alguma qualidade intrínseca e esteticamente superior? As tentativas de responder a essa simples questão resultaram em uma variedade de experimentos psicológicos e numa vasta literatura.

OS SENTIDOS SE DELICIAM EM COISAS DEVIDAMENTE PROPORCIONADAS

Com as palavras do título desta seção, o filósofo escolástico italiano São Tomás de Aquino (c. 1225-1274) tentou captar uma relação fundamental entre beleza e matemática. Os humanos parecem reagir com uma sensação de prazer a "formas" que possuem certas simetrias ou obedecem a certas regras geométricas.

Em nosso exame do valor estético potencial da Razão Áurea, iremos nos concentrar na estética das formas e linhas muito simples, não-representacionais, e não em materiais visuais e obras de arte complexos. Além disso, na maioria das experiências psicológicas que descreverei, o termo "belo" foi, na verdade, evitado. Em vez disso, foram utilizadas palavras como "agradável" e "atraente". Isto evita a necessidade de uma definição de "belo" e se baseia no fato de que a maioria das pessoas tem uma idéia muito boa do que gosta, mesmo que não consiga explicar o motivo.

Muitos autores afirmaram que o Retângulo Áureo é o mais esteticamente agradável de todos os retângulos. O interesse mais recente por essa questão foi iniciado por uma série de publicações meio excêntricas do pesquisador alemão Adolph Zeising, que começou em 1854 com *Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers* (A nova teoria das proporções no corpo humano) e culminou com a publicação (após a morte de Zeising) de um livro volumoso, *Der Goldne Schnitt* (A seção áurea), em 1884. Nessas obras, Zeising combinou sua própria interpretação das idéias pitagóricas e vitruvianas para afirmar que "a divisão do corpo humano, a estrutura de muitos animais que são caracterizados por uma constituição bem desenvolvida, os tipos fundamentais de muitas formas de plantas,... a harmonia dos acordes musicais mais prazerosos e a proporcionalidade dos mais belos trabalhos em arquitetura e escultura" se baseiam na Razão Áurea. Para ele, portanto, a Razão Áurea oferecia a chave para a compreensão de todas as proporções nas "mais refinadas formas de natureza e arte".

Um dos fundadores da psicologia moderna, Gustav Theodor Fechner (1801-1887), tomou para si a tarefa de verificar a teoria predileta de Zeising. Fechner é considerado um pioneiro da estética experimental. Em uma de

suas primeiras experiências, ele fez uma pesquisa de opinião pública na qual pedia aos visitantes da Galeria de Dresden que comparassem a beleza de duas pinturas de Madona praticamente idênticas (a "Madona de Darmstadt" e a "Madona de Dresden") que estavam expostas juntas. As duas pinturas foram atribuídas ao pintor alemão Hans Holbein, o Jovem (1497-1543), mas havia uma suspeita de que a "Madona de Dresden" fosse, na verdade, uma cópia. Esta experiência foi um fracasso total — de 11.842 visitantes, apenas 113 responderam ao questionário, e mesmo esses eram, na maioria, críticos de arte ou pessoas que tinham opiniões prévias.

As primeiras experiências de Fechner com retângulos foram feitas na década de 1860 e os resultados foram publicados em 1870, e acabaram sendo resumidos no seu livro *Vorschule der Aesthetik* (Introdução à estética), de 1876. Ele se rebelou contra uma abordagem da estética, de cima para baixo que começa com a formulação de princípios abstratos de beleza. Em vez disso, defendia o desenvolvimento da estética experimental de baixo para cima. A experiência era bastante simples: dez retângulos foram colocados em frente a um indivíduo, a quem se pedia que escolhesse o mais agradável e o menos agradável. Os retângulos variavam no quociente entre comprimento e largura de um quadrado (uma razão de 1,00) até um retângulo alongado (uma razão de 2,5). Três dos retângulos eram mais alongados que o Retângulo Áureo, e seis eram mais próximos de um quadrado. Segundo a descrição feita pelo próprio Fechner do ambiente da experiência, os voluntários freqüentemente esperavam e hesitavam, rejeitando um retângulo após outro. Enquanto isso, o responsável pela experiência explicaria que eles deveriam escolher cuidadosamente o retângulo mais agradável, harmônico e elegante. Na experiência de Fechner, 76% das escolhas se concentraram em três retângulos que tinham as razões 1,75, 1,62, 1,50, com o pico no Retângulo Áureo (1,62). Cada um dos outros retângulos foi escolhido por menos de 10% das pessoas.

A motivação de Fechner para estudar o assunto não estava isenta de preconceito. Ele próprio admitia que a inspiração para a pesquisa surgiu quando ele "teve a visão de um mundo unificado de pensamento, espírito e matéria, ligados pelo mistério dos números". Embora ninguém acuse Fechner de alterar os resultados, algumas pessoas especulam que ele pode ter produ-

zido subconscientemente circunstâncias que favoreceram o resultado que ele desejava. De fato, os artigos não publicados de Fechner revelam que ele fez experiências semelhantes com elipses, e não tendo conseguido descobrir qualquer preferência pela Razão Áurea, não publicou os resultados.

Fechner também mediu as dimensões de milhares de livros, molduras de quadros, janelas e outros objetos retangulares. Seus resultados foram bastante interessantes e quase sempre divertidos. Por exemplo, ele verificou que as cartas de baralho alemãs tendiam a ser um pouco mais alongadas do que o Retângulo Áureo, enquanto as cartas francesas eram menos alongadas. Por outro lado, ele descobriu que a proporção altura-largura média de quarenta romances da biblioteca pública era próxima de Φ. Pinturas (a área dentro da moldura) eram, na verdade, "significativamente mais curtas" que o Retângulo Áureo. Fechner fez a seguinte observação sobre o formato de janelas (politicamente incorretas, segundo os padrões atuais): "Somente os formatos das janelas de casas de camponeses parecem quase sempre quadrados, o que é coerente com o fato de que pessoas com um menor nível de educação têm maior preferência por esta forma do que as pessoas com uma educação mais elevada." Fechner ainda afirmou que o ponto em que a peça transversa cruzava o poste de pé nas cruzes tumulares dividia o poste, em média, em uma Razão Áurea.

Muitos pesquisadores repetiram experiências semelhantes no século XX, com resultados variados. Grandes entusiastas da Razão Áurea costumam relatar somente as experiências que parecem sustentar a idéia de uma preferência estética pela Razão Áurea. Contudo, pesquisadores mais cuidadosos chamam a atenção para a natureza bastante tosca e para os defeitos metodológicos de muitas dessas experiências. Alguns acharam que os resultados dependiam, por exemplo, do posicionamento dos retângulos: se estavam posicionados com seu lado comprido horizontalmente ou verticalmente, e do tamanho e da cor dos retângulos, da idade dos voluntários, de diferenças culturais e, principalmente, do método experimental utilizado. Em um artigo publicado em 1965, os psicólogos americanos L. A. Stone e L. G. Collins sugeriram que a preferência pelo Retângulo Áureo apontada por algumas das experiências estava relacionada com a área do campo visual humano. Esses pesquisadores descobriram que "um retângulo médio" de

retângulos desenhados dentro e em torno do campo de visão binocular de vários participantes da experiência tinha uma razão entre o comprimento e a largura de cerca de 1,5, não muito distante da Razão Áurea. Experiências posteriores, porém, não confirmaram a hipótese de Stone e Collins. Em uma experiência feita em 1966 por H. R. Schiffman, da Universidade de Rutgers, pediu-se aos participantes que "desenhassem em uma folha de papel o retângulo mais esteticamente agradável" que eles pudessem. Depois disso, eles foram instruídos a direcionar a figura horizontalmente ou verticalmente (em relação ao seu lado mais comprido) na posição mais agradável. Embora Schiffman tenha encontrado uma preferência esmagadora pela direção horizontal, coerente com o formato do campo visual, a razão média entre o comprimento e a largura foi de aproximadamente 1,9 — distante tanto da Razão Áurea quanto do "retângulo médio" do campo visual.

O psicólogo Michael Godkewitsch, da Universidade de Toronto, lançou dúvidas ainda maiores a respeito da idéia de o Retângulo Áureo ser o retângulo mais agradável. Godkewitsch primeiro destacou o fato importante de que a preferência média do grupo pode não refletir o retângulo preferido de cada indivíduo. Quase sempre, uma coisa que é preferida pela média não é a primeira escolha de ninguém. Por exemplo, a marca de chocolate que todo mundo escolhe em segundo lugar pode, na média, ficar em primeiro, mas ninguém a compra! Conseqüentemente, as primeiras escolhas fornecem uma medida mais significativa de preferência do que a classificação da preferência média. Godkewitsch notou também que, se a preferência pela Razão Áurea é, de fato, universal e genuína, então deveria receber o maior número de primeiras escolhas, independentemente dos outros retângulos que fossem apresentados aos participantes.

Godkewitsch publicou em 1974 os resultados de um estudo que envolveu vinte e sete retângulos com razão entre comprimento e largura em três classes. Em uma classe, a Razão Áurea vinha depois do retângulo mais alongado; em outra, estava no meio, e no terceiro, vinha depois do mais curto. Os resultados da experiência mostraram, segundo Godkewitsch, que a preferência pelo Retângulo Áureo era uma conseqüência de sua posição na classe dos retângulos que eram apresentados e do fato de que fora usada a classifi-

cação de preferências médias (em vez das primeiras escolhas) nas primeiras experiências. Godkewitsch concluiu que "a questão básica, se existe ou não, no mundo ocidental, uma preferência *estética* verbalmente expressa e confiável por uma razão específica entre comprimento e largura de formatos retangulares provavelmente pode ser respondida negativamente. A teoria estética dificilmente tem qualquer análise racional que veja a Seção Áurea como um fator decisivo na beleza visual formal."

Nem todos concordam com as conclusões de Godkewitsch. O psicólogo britânico Chris McManus publicou em 1980 os resultados de um cuidadoso estudo em que usou o método de comparações em pares, no qual um julgamento é feito para cada par de retângulos. Este método é considerado superior a outras técnicas experimentais, pois há bastante evidência de que classificações tendem a ser um processo de comparações de pares sucessivos. McManus concluiu que "existe razoável evidência do fenômeno que Fechner defendeu, mesmo que a própria metodologia de Fechner na sua demonstração seja, na melhor das hipóteses, bastante suspeita devido a artifícios metodológicos". McManus admitiu, porém, que, "se a Seção Áurea, *per se*, é importante, em vez de razões similares (por exemplo, 1,5, 1,6 ou mesmo 1,75), não está claro".

Você mesmo pode fazer o teste (ou seus amigos) sobre o retângulo que você prefere. A Figura 84 mostra uma série de quarenta e oito retângulos,

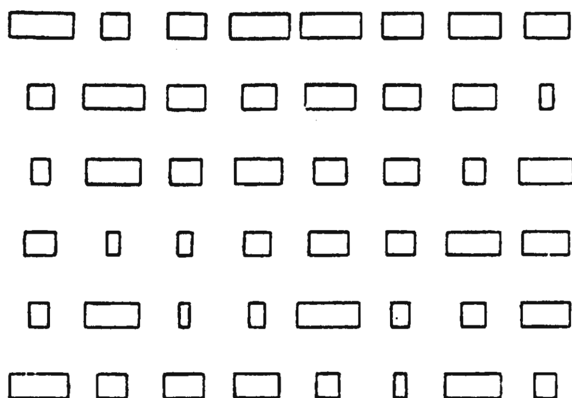


Figura 84

todos com a mesma altura, mas com as larguras variando de 0,4 até 2,5 vezes sua altura. O matemático George Markowsky, da Universidade do Maine, usou esta série em suas próprias experiências informais. Você preferiu o Retângulo Áureo como sua primeira escolha? (É o quinto da esquerda para a direita, na quarta linha.)

MÚSICA ÁUREA

Todos os quartetos de cordas e todas as orquestras sinfônicas ainda usam a descoberta de Pitágoras das relações entre números inteiros e os diferentes tons musicais. Além disso, no currículo da Grécia antiga até a era medieval, a música era considerada parte da matemática, e os músicos concentravam seus esforços na compreensão das bases matemáticas dos tons. O conceito de "música das esferas" representava uma síntese gloriosa de música e matemática, e na imaginação de filósofos e músicos, ele entrelaçava todo o cosmo em um grande desenho, que só poderia ser percebido por alguns privilegiados. Nas palavras do grande orador e filósofo romano Cícero (c. 106-43 a.C.): "Os ouvidos dos mortais se encheu com esse som, mas são incapazes de ouvi-lo... Você pode também olhar diretamente para o sol, cujos raios são fortes demais para seus olhos." Somente no século XII a música rompeu com as prescrições e fórmulas matemáticas. No entanto, ainda no século XVIII, o filósofo racionalista alemão Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) escreveu: "A música é um exercício aritmético secreto, e a pessoa que se delicia com ela não percebe que está manipulando números". Mais ou menos na mesma época, o grande compositor alemão Johann Sebastian Bach (1685-1750) tinha fascinação por todos os tipos de jogos que pudessem ser executados com notas musicais e números. Por exemplo, ele codificava sua assinatura em algumas de suas composições por meio de códigos musicais. Na antiga notação musical alemã, B representava um B bemol (si bemol) e H valia por um B natural (si natural), de modo que Bach podia soletrar seu nome em notas musicais: B bemol, A, C, B natural. Outra codificação que Bach usou se baseava na gematria. Considerando A = 1,

B = 2, C = 3 e assim por diante, B-A-C-H = 14 e J-S-B-A-C-H = 41 (pois I e J eram a mesma letra no alfabeto alemão da época). No seu livro *Bachnalia* (1994), o matemático e fã de Bach Eric Altschuler dá numerosos exemplos do aparecimento de 14 (BACH codificado) e 41 (JSBACH) na música de Bach, que ele acredita terem sido postos ali deliberadamente por Bach. Por exemplo, na primeira fuga, a Fuga em C Maior, Livro Um do *Cravo bem temperado* de Bach, o motivo tem catorze notas. Além disso, das vinte e quatro entradas, vinte e duas percorriam todo o caminho, e a vigésima terceira percorria quase todo o caminho. Somente uma única entrada — a décima quarta — não ia a lugar algum. Altschuler especula que a obsessão de Bach por codificar sua assinatura nas suas composições é semelhante à de artistas que incluem seus próprios retratos em suas pinturas ou à de Alfred Hitchcock, que fazia uma rápida aparição em cada um de seus filmes.

Devido a essas relações históricas entre música e números, é bastante natural nos perguntarmos se a Razão Áurea (e os números de Fibonacci) tinha algum papel no desenvolvimento de instrumentos musicais ou na composição musical.

O violino é um instrumento no qual a Razão Áurea de fato aparece com freqüência. Habitualmente, a caixa de som do violino contém doze ou mais arcos de curvatura (que fazem as curvas do violino) de cada lado. O arco plano na base quase sempre é centrado no ponto da Seção Áurea, a partir da linha do centro.

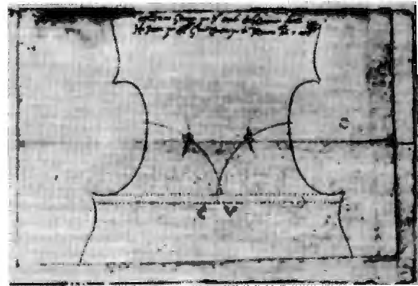


Figura 85

Alguns dos violinos mais famosos foram feitos por Antonio Stradivari (1644-1737), de Cremona, Itália. Desenhos originais (Figura 85) mostram que Stradivari tinha um cuidado especial em dispor geometricamente o lugar dos "olhos" dos *f-buracos*, em posições determinadas pela Razão Áurea. Poucos (se é que existem) acreditam que é a aplicação da Razão Áurea que dá a um violino Stradivarius sua qualidade superior. Mais freqüentemente, elementos como o verniz, o aferidor, a madeira e a perícia

geral são citados como o possível ingrediente "secreto". Muitos especialistas concordam que a popularidade dos violinos do século XVIII em geral provém de sua adaptabilidade ao uso em grandes salas de concerto. A maioria desses especialistas também dirá que não existe "segredo" nos violinos Stradivarius — eles são simplesmente obras de arte inimitáveis, a soma de todas as partes que compõem a obra desse esplêndido artífice.

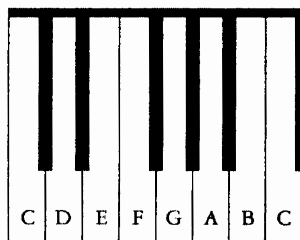


Figura 86

Outro instrumento musical freqüentemente associado aos números de Fibonacci é o piano. A oitava no teclado de um piano consiste em treze teclas, oito teclas brancas e cinco teclas pretas (Figura 86). As cinco teclas pretas formam um grupo de duas teclas e outra de três. Acontece que os números 2, 3, 5, 8 e 13 são números de Fibonacci consecutivos. A primazia da escala em dó maior, por exemplo, é devida, em parte, ao fato de que ela é tocada nas teclas brancas do piano. No entanto, a relação entre o teclado do piano e os números de Fibonacci provavelmente é uma pista falsa. Primeiro, note que a escala cromática (de C até B na figura), que é fundamental na música ocidental, é, na verdade, composta de doze, não de treze, semitons. A mesma nota, C, é tocada duas vezes na oitava, para indicar o fim do ciclo. Segundo, e mais importante, o arranjo das teclas em duas filas, com os sustenidos e bemóis sendo agrupados em dois e três na fila de cima, data do início do século XV, muito antes da publicação do livro de Pacioli e mesmo antes de qualquer compreensão séria dos números de Fibonacci.

Assim como os Numeristas Áureos afirmam que a Razão Áurea tem qualidades estéticas especiais nas artes visuais, eles também lhe atribuem efeitos particularmente agradáveis na música. Por exemplo, livros sobre a Razão Áurea são rápidos em destacar que muitos consideram a sexta maior e a sexta menor os intervalos musicais mais agradáveis, e que esses intervalos estão relacionados à Razão Áurea. Um tom musical puro é caracterizado por uma freqüência fixa (medida pelo número de vibrações por segundo) e por uma amplitude fixa (que determina a sonoridade instantânea). O tom padrão usado na afinação é o A (lá), que vibra a 440 oscilações por segundo.

Uma sexta maior pode ser obtida por uma combinação de A e C, sendo que a última nota é produzida por uma freqüência aproximada de 264 vibrações por segundo. A razão das duas freqüências, $^{440}/_{264}$, reduz-se a $^{5}/_{3}$, a razão de dois números de Fibonacci. Uma sexta menor pode ser obtida de um C alto (528 vibrações por segundo) e um E (330 vibrações por segundo). A razão neste caso, $^{528}/_{330}$, reduz-se a $^{8}/_{5}$, que é também a razão de dois números de Fibonacci e já bastante próxima da Razão Áurea. (As razões de números de Fibonacci sucessivos se aproximam da Razão Áurea.) Porém, como na pintura, note que, também neste caso, o conceito de "mais agradável intervalo musical" é um tanto ambíguo.

Instrumentos de notas fixas, como o piano, são afinados de acordo com a "escala temperada" popularizada por Bach, na qual cada semitom tem uma razão de freqüência igual à do semitom seguinte, tornando fácil tocar em qualquer tom. A razão entre duas freqüências adjacentes em um instrumento bem temperado é $2^{1/12}$ (a raiz décima segunda de dois). Como esse número é deduzido? Suas origens realmente remontam à Grécia antiga. Lembre-se que uma oitava é obtida dividindo-se uma corda em duas partes iguais (um quociente de freqüência 2:1), e uma quinta é produzida por um quociente de freqüência 3:2 (basicamente usando dois terços de uma corda). Uma das questões que intrigavam os pitagóricos era se, repetindo-se o procedimento para criar a quinta (aplicando a razão de freqüência $^{3}/_{2}$ consecutivamente), seria possível gerar um número inteiro de oitavas. Em termos matemáticos, isto significa perguntar: existem dois inteiros n e m, tal que $(^{3}/_{2})^{n}$ é igual a 2^{m}? Ocorre que, embora não existam dois números n e m que satisfaçam essa igualdade com precisão, $n = 12$ e $m = 7$ chegam bem perto, devido à coincidência que $2^{1/12}$ é quase igual a $3^{1/19}$ (a raiz décima nona de 3). As doze freqüências da oitava são, portanto, potências aproximadas da razão da freqüência básica $2^{1/12}$. A propósito, você pode achar curioso que a razão de $^{19}/_{12}$ seja igual a 1,58, não muito distante de Φ.

Outra maneira pela qual a Razão Áurea poderia, em princípio, contribuir para o resultado satisfatório de uma peça musical é por meio do conceito de equilíbrio proporcional. Mas a situação aqui é um pouco mais complicada do que nas artes visuais. Uma pintura desajeitadamente proporcionada irá se

destacar instantaneamente em uma exposição. Na música, por outro lado, temos de ouvir a peça inteira antes de fazer um julgamento. Mesmo assim, não há dúvida de que compositores experientes elaboram a estrutura de sua música de tal modo que não só as diferentes partes estejam em perfeito equilíbrio entre si, como também cada parte, por si mesma, represente um receptáculo que se ajuste bem a seu argumento musical.

Vimos muitos exemplos em que entusiastas da Razão Áurea esmiuçaram as proporções de numerosos trabalhos nas artes visuais para descobrir possíveis aplicações de Φ. Esses aficionados têm sujeitado muitas composições musicais ao mesmo tipo de tratamento. Os resultados são muito semelhantes — ao lado de algumas utilizações genuínas da Razão Áurea como um sistema proporcional, existem, provavelmente, muitas concepções equivocadas.

Paul Larson, da Universidade de Temple, afirmou em 1978 ter descoberto a Razão Áurea na música ocidental mais antiga registrada em notação musical — os cantos "Kyrie" da coleção de cantos gregorianos conhecidos como Liber Usualis. Os trinta cantos Kyrie da coleção abrangem um período de mais de seiscentos anos, começando no século X. Larson afirmou que encontrou um "evento" importante (por exemplo, o começo ou o fim de uma frase musical) na separação da Razão Áurea em 105 das 146 seções dos Kyries que ele analisou. Contudo, na falta de qualquer justificativa histórica que apóie ou de qualquer argumentação lógica convincente para o uso da Razão Áurea nesses cantos, temo que isto não passe de mais um exercício de malabarismo numérico.

Em geral, a contagem de notas e pulsos freqüentemente revela várias correlações numéricas entre diferentes partes de uma peça musical, e o analista enfrenta uma compreensível tentação de concluir que o compositor introduziu certas relações numéricas. Ainda assim, sem uma base firmemente documentada (ausente em muitos casos), essas afirmações permanecem dúbias.

Em 1995, o matemático John F. Putz, do Alma College, em Michigan, examinou a questão de saber se Mozart (1756-1791) usou a Razão Áurea nos vinte e nove movimentos de suas sonatas para piano, que consistem em duas seções distintas. Geralmente, essas sonatas compreendem duas partes: a Exposição, em que o tema musical é introduzido, e o Desenvolvimento e

a Recapitulação, em que o tema principal é desenvolvido e revisitado. Como peças musicais são divididas em unidades iguais chamadas *compassos*, Putz examinou as razões entre os números dos compassos nas duas seções das sonatas. Mozart, que "não falava nem pensava em nada além de números" durante o tempo que passou na escola (segundo o testemunho de sua irmã), provavelmente é um dos melhores candidatos ao uso da matemática em suas composições. De fato, muitos artigos anteriores afirmaram que as sonatas para piano de Mozart refletem a Razão Áurea. Os primeiros resultados de Putz parecem ser bastante promissores. Na Sonata No. 1 em *Dó* maior, por exemplo, o primeiro movimento consiste em sessenta e dois compassos no Desenvolvimento e Recapitulação e em trinta e oito na Exposição. A razão 62/38 = 1,63 é bastante próxima da razão Áurea. No entanto, um exame completo de todos os dados basicamente convence Putz de que Mozart *não* usou a Razão Áurea em suas sonatas, nem fica claro por que a simples questão dos compassos resultaria em um efeito agradável. Portanto, parece que, embora muitos acreditem que a música de Mozart seja verdadeiramente "divina", a "Proporção Divina" não faz parte dela.

Um compositor famoso que pode ter usado bastante a Razão Áurea é o húngaro Béla Bartók (1881-1945). Um pianista virtuose e folclorista, Bartók misturava elementos de outros compositores que ele admirava (entre eles Strauss, Liszt e Debussy) com música folclórica para criar sua música extremamente pessoal. Certa vez, ele disse que "o mundo melódico de meus quartetos de cordas não difere essencialmente daqueles das canções folclóricas". A vitalidade rítmica de sua música e uma bem calculada simetria formal se uniram para fazer dele um dos compositores mais originais do século XX.

O musicólogo húngaro Ernö Lendvai avaliou exaustivamente a música de Bartók e publicou muitos livros e artigos sobre o assunto. Lendvai testemunha que "das análises estilísticas da música de Bartók, pude concluir que a característica principal de sua técnica cromática é a obediência às leis da Seção Áurea em cada movimento".

Segundo Lendvai, a maneira de Bartók manejar o ritmo da composição fornece um excelente exemplo do uso que ele fez da Razão Áurea. Analisando, por exemplo, um movimento da fuga de *Música para cordas, percussão e*

celesta de Bartók, Lendvai mostra que os oitenta e nove compassos dos movimentos são divididos em duas partes, uma com cinqüenta e cinco compassos e outra com trinta e quatro compassos, pelo pico piramidal (em termos do volume da sonoridade) do movimento. Outras divisões são marcadas pela colocação ou retirada de surdinas (a diminuição do som dos instrumentos) e por outras mudanças de textura (Figura 87). Todos os números dos compassos são números de Fibonacci, com as razões entre partes principais (por exemplo, 55/34) próximas da Razão Áurea. Do mesmo modo, na *Sonata para dois pianos e percussão*, os vários temas se desenvolvem em uma ordem de Fibonacci/Razão Áurea em termos dos números de semitons (Figura 88).

Alguns musicólogos não aceitam as análises de Lendvai. O próprio Lendvai admite que Bartók disse muito pouco ou nada sobre suas compo-

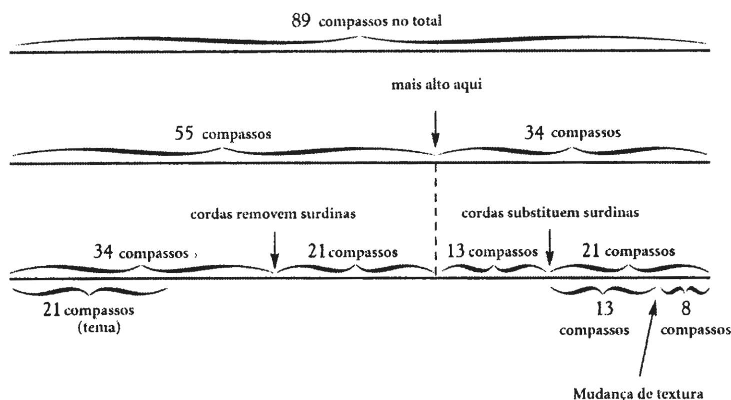


Figura 87

Leitmotiv

Tema principal

Tema secundário

leitmotiv 3 + 5 = 8
tema principal 5 + 8 = 13
tema secundário 13,21

Figura 88

sições, afirmando: "Deixem minha música falar por si mesma; não deixo nenhuma explanação de minhas obras". O fato de que Bartók não deixou qualquer esboço que indicasse que ele derivava ritmos e escalas numericamente faz de qualquer análise, no máximo, uma sugestão. Além disso, Lendvai, na verdade, esquiva-se da questão de saber se Bartók usou a Razão Áurea conscientemente. O musicólogo húngaro Laslo Somfai, no seu livro *Béla Bartók: Composição, conceitos e fontes autográficas*, de 1996, discorda totalmente da idéia de que Bartók usasse a Razão Áurea. Com base em uma análise extensa (que levou três décadas) de 3.600 páginas, Somfai conclui que Bartók compôs sem qualquer teoria musical preconcebida. Outros musicólogos, entre eles Ruth Tatlow e Paul Griffiths, também se referem ao estudo de Lendvai como "dúbio".

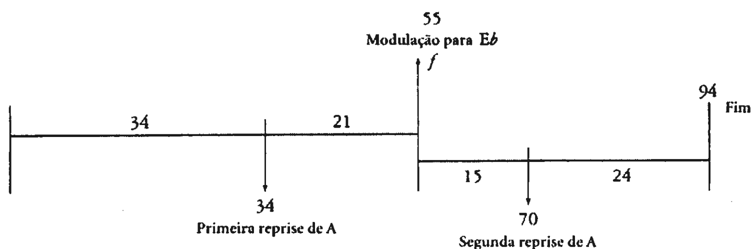


Figura 89

No interessante livro *Debussy em proporção*, Roy Howat, da Universidade de Cambridge, afirma que o compositor francês Claude Debussy (1862-1918), cujas inovações harmônicas influenciaram profundamente várias gerações de compositores, usou a Razão Áurea em muitas de suas composições. Por exemplo, na peça para piano solo *Reflets dans l'eau* (Reflexos na água), parte da série *Images*, a primeira reprise do rondó ocorre após o compasso 34, que está no ponto da Razão Áurea entre o começo e o clímax no compasso 55. Os números 34 e 55 são, é claro, números de Fibonacci, e a razão 34/21 é uma boa aproximação da Razão Áurea. A mesma estrutura é espelhada na segunda parte, que é dividida em uma razão 24/15 (igual à razão entre dois números de Fibonacci 8/5, novamente próxima da Razão Áurea; Figura 89). Howat

encontra divisões semelhantes nos três esboços sinfônicos *La Mer* (O mar), na peça para piano *Jardins sous la pluie* (Jardins sob a chuva) e em outras obras.

Devo admitir que, devido à história de *La Mer*, acho um tanto difícil acreditar que Debussy tenha usado qualquer desenho matemático na composição dessa peça específica. Ele começou *La Mer* em 1903, e em uma carta que escreveu ao seu amigo André Messager diz: "Você pode não saber que eu estava destinado a uma vida de marinheiro, e que foi apenas por acaso que o destino me levou em outra direção. Mas sempre conservei um amor apaixonado por ele [o mar]". Na época em que a composição de *La Mer* foi concluída, em 1905, a vida de Debussy foi literalmente virada de cabeça para baixo. Ele havia trocado sua primeira esposa, "Lily" (nome verdadeiro Rosalie Texier), pela fascinate Emma Bardac; Lily tentou o suicídio. E ambas moveram ações judiciais contra o compositor. Se você escutar *La Mer* — talvez a obra mais pessoal e apaixonada de Debussy — poderá literalmente ouvir não só um retrato musical do mar, provavelmente inspirado pelo trabalho do pintor inglês Joseph Mallord William Turner, mas também uma expressão do tumultuado período da vida do compositor.

Como Debussy não falava muito sobre sua técnica de composição, devemos manter uma clara distinção entre o que pode ser uma interpretação forçada imposta à composição e a intenção consciente e real do compositor (que continua desconhecida). Para sustentar sua análise, Howat recorre principalmente a duas peças de evidência circunstancial: a associação estreita de Debussy com alguns dos pintores simbolistas que notoriamente se interessaram pela Razão Áurea e uma carta que Debussy escreveu em agosto de 1903 ao seu editor, Jacque Durand. Nessa carta, que acompanhava as provas corrigidas de *Jardins sous la pluie*, Debussy fala a respeito de um compasso que falta na composição e explica: "Contudo, ele é necessário, no que diz respeito ao número; o número divino." A implicação aqui é que não só Debussy estava construindo sua estrutura harmônica com números em geral, mas que o "número divino" (que se supõe ser uma referência à Razão Áurea) tinha um papel importante.

Howat também sugere que Debussy estava influenciado pelos textos do matemático e crítico de arte Charles Henry, que tinha grande interesse pelas relações numéricas inerentes à melodia, à harmonia e ao ritmo. As pu-

blicações de Henry sobre estética, como *Introduction à une esthétique scientifique* (Introdução a uma estética científica; 1885), deu papel de destaque à Razão Áurea.

Provavelmente, nunca saberemos com certeza se esse grande pilar do modernismo francês realmente pretendeu usar a Razão Áurea, para controlar proporções formais. Um de seus pouquíssimos alunos de piano, *mademoiselle* Worms de Romilly, escreveu uma vez que ele "sempre se arrependia de não ter trabalhado em pintura em vez de música". A estética musical extremamente original de Debussy pode ter sido ajudada, em pequena escala, pela aplicação da Razão Áurea, mas isto certamente não foi a fonte principal de sua criatividade.

Apenas como curiosidade, os nomes de Debussy e Bartók estão relacionados por meio de uma anedota divertida. Durante a visita do jovem compositor húngaro a Paris, o grande professor de piano Isidore Philipp se ofereceu para apresentar Bartók ao compositor Camille Saint-Saëns, na época uma grande celebridade. Bartók declinou. Philipp, então, ofereceu-lhe um encontro com o grande organista e compositor Charles-Marie Widor. Bartók recusou novamente. "Bom", disse Philipp, "se você não quer se encontrar com Saint-Saëns e Widor, quem você gostaria de conhecer?" "Debussy", respondeu Bartók. "Mas ele é um homem terrível", disse Philipp. "Ele odeia todo mundo e certamente será rude com você. Você quer ser insultado por Debussy?" "Sim", Bartók respondeu sem hesitação.

A introdução de tecnologias de gravação e da música de computador no século XX acelerou as medições numéricas precisas e, assim, incentivou a música baseada em números. O compositor austríaco Alban Berg (1885-1935), por exemplo, elaborou seu *Kammerkonzert* inteiramente em torno do número 3: há unidades de trinta compassos, sobre três temas, com três "cores" básicas (piano, violino e sopros). O compositor francês Olivier Messiaen (1908-1992), que era movido principalmente por uma profunda fé católica e pelo amor pela natureza, também usou números conscientemente (por exemplo, para determinar o número de movimentos) em construções rítmicas. Mesmo assim, quando lhe perguntaram especificamente, em 1978, a respeito da Razão Áurea, ele negou seu uso.

O pitoresco compositor, matemático e professor Joseph Schillinger (1895-1943) exemplificava com sua própria personalidade e seus ensinamentos a visão platônica da relação entre matemática e música. Após estudar no Conservatório de São Petersburgo e ensinar e compor nas Academias de Kharkov e Leningrado, ele fixou residência nos Estados Unidos, em 1928, e ali se tornou professor de matemática e de música em muitas instituições, entre elas, as Universidades de Colúmbia e Nova York. O famoso compositor e pianista George Gershwin, o clarinetista e *bandleader* Benny Goodman e o líder de banda dançante Glenn Miller foram alunos de Schillinger. Ele acreditava na base matemática da música e desenvolveu um Sistema de Composição Musical. Especificamente, em algumas peças, notas sucessivas na melodia se seguiam a intervalos de Fibonacci, quando contadas em unidades de meio-intervalo (Figura 90). Para Schillinger, esses saltos de Fibonacci das notas transmitiam a mesma sensação de harmonia que as razões filotáxicas das folhas em um ramo transmitem a um botânico. Schillinger encontrou "música" nos lugares mais estranhos. Em *Joseph Schillinger: A Memoir*, o livro biográfico escrito por sua viúva, Frances, ela conta a história de um grupo que passeava de carro durante uma chuva torrencial. Schillinger notou: "O som da água caindo tem seu ritmo, e o limpador do pára-brisa tem seu padrão rítmico. Isso é arte inconsciente." Uma das tentativas de Schillinger de demonstrar que a música pode se basear inteiramente em formulações matemáticas foi particularmente divertida. Ele basicamente copiou as flutuações de uma curva da bolsa de valores, tal como apareciam no *New York Times*, em um gráfico, e traduzindo os altos e baixos em intervalos musicais proporcionais, mostrou que poderia obter uma composição um tanto semelhante às do grande Johann Sebastian Bach.

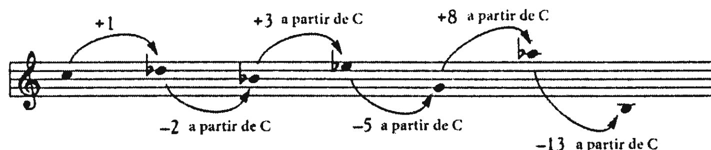


Figura 90

A conclusão deste breve passeio pelo mundo da múscia é que as afirmações de que certos compositores usaram a Razão Áurea na sua música em geral saltam depressa demais de números gerados por simples contagens (de compassos, notas etc.) para as interpretações. Mesmo assim, não há dúvida de que o século XX, em particular, produziu um interesse renovado pelo uso dos números na música. Como parte deste renascimento pitagórico, a Razão Áurea também começou a aparecer de maneira mais proeminente na obra de vários compositores.

O crítico de música vienense Eduard Hanslick (1825-1904) expressou de modo magnífico a relação entre música e matemática no livro *A beleza na música*:

> A "música" da natureza e a música do homem pertencem a duas categorias distintas. A tradução da primeira para a última passa pela ciência da matemática. Uma proposição importante e fecunda. Ainda assim, estaríamos errados se fossemos construí-la no sentido de que o homem modelou seu sistema musical de acordo com cálculos feitos intencionalmente, tendo o sistema surgido por meio da aplicação inconsciente de conceitos preexistentes de quantidade e proporção, por meio de processos sutis de medição e contagem. Mas as leis pelas quais os últimos são governados só foram demonstradas posteriormente pela ciência.

PITÁGORAS PLANEJOU ISTO

Com as palavras do título, o famoso poeta irlandês William Butler Yeats (1865-1939) começa seu poema "The Statues" (As estátuas). Yeats, que uma vez afirmou que "a verdadeira essência do gênio, de qualquer tipo, é a precisão", analisa no poema a relação entre números e paixão. A primeira estrofe do poema é a seguinte:

Pitágoras planejou isto. Por que as pessoas fitam?
Seus números, embora tenham movido ou pareçam mover
Em mármore ou bronze, careciam de caráter.

Mas meninos e meninas, pálidos do amor imaginado
De camas solitárias, sabiam o que eram,
Aquela paixão poderia trazer caráter o suficiente,
E premia à meia-noite em algum lugar público
Lábios vivos sobre um rosto medido com prumo.

Yeats enfatiza admiravelmente o fato de que, embora as proporções calculadas das esculturas gregas possam parecer frias a alguns, os jovens e apaixonados viam essas formas como a encarnação dos objetos do seu amor.

À primeira vista, nada parece mais distante da matemática do que a poesia. Pensamos que o florescimento de um poema a partir da pura imaginação do poeta deveria ser tão ilimitado quanto o florescimento de uma rosa vermelha. Porém, lembre-se de que o crescimento das pétalas da rosa na verdade ocorre em um padrão bem orquestrado baseado na Razão Áurea. Será que a poesia também poderia ser construída nessa base?

Em princípio, há pelo menos duas maneiras pelas quais a Razão Áurea e os números de Fibonacci podem estar ligados à poesia. A primeira é que podem existir poemas sobre a própria Razão Áurea ou sobre os números de Fibonacci (por exemplo, "Constantemente na Média," de Paul Bruckman; apresentado no Capítulo 4) ou sobre formas geométricas ou fenômenos que são relacionados à Razão Áurea. A segunda é que pode haver poemas nos quais a Razão Áurea ou os números de Fibonacci sejam, de alguma maneira, utilizados na formação da estrutura, do padrão ou do ritmo.

Exemplos do primeiro tipo são dados por um bem-humorado poema de J. A. Lindon, pelo poema dramático "Fausto", de Johann Wolfgang von Goethe, e pelo poema "O náutilo com câmaras", de Oliver Wendell Holmes

Martin Gardner usou o curto poema de Lindon, para abrir o capítulo sobre Fibonacci em seu livro *Circo matemático*. Referindo-se à recursiva relação que define a seqüência de Fibonacci, diz o poema:

Cada esposa de Fibonacci,
Não comendo nada que não fosse pesado,

Pesava tanto quanto as duas antes dela,
Sua quinta era uma matrona!

De modo semelhante, duas linhas de um poema de Katherine O'Brien dizem:

Fibonacci não conseguia dormir —
Contava coelhos em vez de ovelhas.

O poeta e dramaturgo alemão Goethe (1743-1832) certamente foi um dos maiores mestres da literatura mundial. Seu gênio que tudo abarcava é um exemplo perfeito para o *Fausto* — uma descrição simbólica da luta do homem por conhecimento e poder. Fausto, um erudito doutor alemão, vende sua alma ao diabo (personificado por Mefistófeles) em troca de conhecimento, juventude e poder mágico. Quando Mefistófeles descobre que o "Druidenfuss" ("Pé do feiticeiro celta") do pentagrama está desenhado na soleira da porta de Fausto, ele não consegue sair. Os poderes mágicos atribuídos ao pentagrama desde os pitagóricos (e que levaram à definição da Razão Áurea) ganharam significado simbólico adicional na cristandade, pois se supunha que os cinco vértices representavam as letras do nome de Jesus. Como tal, o pentagrama era considerado uma fonte de medo do diabo. Diz o texto:

Mefistófeles: Deixe-me admitir; um pequeno obstáculo
Proíbe meu caminhar para fora daqui:
É o pé do druida sobre tua soleira.
Fausto: O pentagrama te incomoda?
Mas dize, então, filho do inferno.
Se isto te impede, como tu entraste?
Mefistófeles: Observe! As linhas estão mal desenhadas;
Aquela linha, o ângulo apontando para fora,
Está, como tu vês, um pouco aberta.

Mefistófeles, portanto, usa a trapaça — o fato de o pentagrama ter uma pequena abertura — para conseguir entrar. Obviamente, Goethe não tinha a

intenção de se referir ao conceito matemático da Razão Áurea no *Fausto* e ele incluiu o pentagrama apenas por suas qualidades simbólicas. Goethe manifestou em outro lugar sua opinião sobre a matemática assim: "Os matemáticos são como os franceses: quando você fala com eles, imediatamente traduzem para sua própria língua, e de pronto vira uma coisa totalmente diferente."

O físico e escritor americano Oliver Wendell Holmes (1809-1894) publicou algumas coletâneas de poemas engenhosos e charmosos. Em "O náutilo com câmaras" ele acha uma moral no crescimento auto-similar da espiral logarítmica que caracteriza a concha do molusco:

Construa mais três imponentes mansões, Ó meu espírito,
À medida que as rápidas estações deslizam!
Abandona seu passado de baixas abóbadas!
Deixe cada novo templo, mais nobre que o último,
Aparta-se dos céus com um domo mais vasto,
Até estar totalmente livre,
Desembaraçado de sua concha apequenada pelo mar agitado da vida.

Há muitos exemplos de estruturas poéticas baseadas em números. Por exemplo, a *Divina comédia*, o colossal clássico literário do poeta italiano Dante Alighieri (1265-1321), é dividido em três partes, escrito em unidades de três linhas, e cada uma das partes tem trinta e três cantos (exceto a primeira, que tem trinta e quatro cantos, para dar um total par de cem cantos).

Provavelmente, foi na poesia que os números de Fibonacci fizeram sua primeira aparição, antes mesmo dos coelhos de Fibonacci. Uma das categorias de métricas em poesia em sânscrito e prakit é conhecida como mātrā-vṛttas. São métricas em que o número de *morae* (sílabas normalmente curtas) permanece constante e o número de letras é arbitrário. Em 1985, o matemático Parmanand Singh, da Faculdade Raj Narain, na Índia, destacou que os números de Fibonacci e a relação que os define apareceram nos textos de três autoridades indianas em mātrā-vṛttas antes de 1202 d.C., o ano em que o livro de Fibonacci foi publicado. O primeiro desses escritores sobre métrica era Ācārya Virahānka, que viveu em alguma época entre o sexto e o oitavo

séculos. Embora a regra que ele dá seja um tanto vaga, ele realmente fala sobre misturar as variações de duas métricas anteriores para obter a seguinte, assim como cada número de Fibonacci é a soma dos dois anteriores. O segundo autor, Gopāla, dá a regra específica, em um texto escrito entre 1133 e 1135. Ele explica que cada métrica é a soma das duas métricas anteriores e calcula a série de métricas 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21..., que é exatamente a seqüência de Fibonacci. Finalmente, o grande escritor jainista, Ācārya Hemacandra, que viveu no século XII e dispunha do patrocínio de dois reis, também afirmou claramente em um manuscrito de 1150 que a "soma do último número e desse último menos um [número de variações] é [aquela] do mātrā-vṛttas em seguida". No entanto, essas primeiras aparições poéticas dos números de Fibonacci aparentemente passaram despercebidas pelos matemáticos.

Em seu livro didático *Fibonaccis Fascinantes*, a escritora Trudi Hammel Garland dá um exemplo de um poema no qual o número de linhas (5), o número de compassos em cada linha (2 ou 3) e o número total de compassos (13) são números de Fibonacci.

A fly and a flea in a flue (3 beats)
Were imprisoned, so what could they do? (3 beats)
Said the fly, "Let us flee!" (2 beats)
"Let us fly!" said the flea, (2 beats)
So they fled through a flaw in the flue. (3 beats)

Uma mosca e uma pulga em um tubo (3 compassos)
Estavam presas, o que elas poderiam fazer? (3 compassos)
Disse a mosca: "Vamos fugir!", (2 compassos)
"Vamos voar", disse a pulga, (2 compassos)
Então elas fugiram por uma falha no tubo. (3 compassos)

Não devemos considerar o surgimento de alguns números de Fibonacci como evidência de que o poeta necessariamente tinha esses números ou a Razão Áurea em mente quando elaborou o padrão estrutural do poema. Como a música, a poesia é, e especialmente era, para ser ouvida, não apenas lida. Con-

seqüentemente, proporção e harmonia, que têm apelo ao ouvido, são importantes elementos estruturais. Isto não quer dizer, contudo, que a Razão Áurea ou os números de Fibonacci sejam as únicas opções no arsenal do poeta.

George Eckel Duckworth, um professor dos clássicos na Universidade Princeton, fez a afirmação mais dramática sobre o aparecimento da Razão Áurea na poesia. Em seu livro *Padrões estruturais e proporções na Eneida de Virgílio*, de 1962, Duckworth afirma que "Virgílio compôs a *Eneida* com base na proporção matemática; cada livro revela, em pequenas unidades e também nas divisões principais, a famosa razão numérica conhecida como Seção Áurea, Proporção Divina ou Média Áurea."

O poeta romano Virgílio (70-9 a.C.) cresceu em uma fazenda, e muitas de suas primeiras poesias pastorais tratam do encanto da vida rural. Seu épico nacional *Eneida*, que conta em detalhes as aventuras do herói troiano Enéas, é considerado uma das maiores obras poéticas da história. Em doze livros, Virgílio segue Enéas desde sua fuga de Tróia para Cartago, passando por seu caso com Dido, até o estabelecimento do estado romano. Virgílio faz de Enéas um modelo de piedade, devoção à família e lealdade ao Estado.

Duckworth fez medições detalhadas dos comprimentos de passagens na *Eneida* e computou as razões entre esses comprimentos. Especificamente, ele contou as linhas em passagens caracterizadas como maiores (e denotou esse número como M) e menores (e denotou o número como m) e calculou as razões entre essas quantidades. A identificação das partes maiores ou menores era baseada no conteúdo. Por exemplo, em muitas passagens, a parte maior ou menor é uma fala, e a outra parte (menor ou maior respectivamente) é uma narrativa ou uma descrição. Dessa análise, Duckworth concluiu que a *Eneida* contém "centenas de Razões Áureas". Ele também notou que uma análise anterior (de 1949) de outra obra de Virgílio (*Georgius I*) deu à razão das duas partes (em termos de números de linhas), conhecidas como "Trabalhos" e "Dias", um valor muito próximo de Φ.

Infelizmente, Roger Herz-Fischler mostrou que a análise de Duckworth provavelmente se baseia em um equívoco matemático. Como esse descuido é endêmico em muitas das "descobertas" da Razão Áurea, explicarei aqui resumidamente.

Suponha que você tenha qualquer par de valores positivos m e M, de modo que M seja maior que m. Por exemplo, $M = 317$ poderia ser o número de páginas do último livro que você leu e m = 160 poderia ser o seu peso em *pounds*. Poderíamos representar esses dois números em uma linha (com comprimentos proporcionais) como na Figura 91. A razão entre a parte mais curta e a mais longa é igual a $m/M = 160/317 = 0{,}504$, enquanto a razão da maior parte para o todo é $M/(M + m) = 317/477 = 0{,}665$. Você notará que o valor de $M/(M + m)$ é mais próximo de $1/\Phi = 0{,}618$ do que m/M. Podemos provar matematicamente que isto ocorre sempre. (Tente isso com as quantidades verdadeiras correspondentes ao seu último livro e ao seu peso.) Pela definição da Razão Áurea, sabemos que quando uma linha é dividida em uma Razão Áurea, $m/M = M/(M + m)$ de maneira precisa. Conseqüentemente, podemos ficar tentados a pensar que, se examinarmos uma série de razões entre números, como os comprimentos de trechos, em busca da possível presença potencial da Razão Áurea, não importa se olhamos a razão entre o mais curto e o mais longo ou entre o mais longo e o todo. O que acabamos de mostrar é que isto definitivamente importa. Um entusiasta da Razão Áurea excessivamente empolgado desejando demonstrar uma relação de Razão Áurea entre os pesos de leitores e o número de páginas dos livros que leram pode ser capaz de fazê-lo apresentando dados na forma $M/(M + m)$, que tende para $1/\Phi$. Foi exatamente isto que aconteceu com Duckworth. Fazendo a infeliz decisão de usar apenas a razão $M/(M + m)$ em sua análise, pois pensou que isso era "ligeiramente mais acurado", ele comprimiu e distorceu os dados, e tornou a análise estatisticamente inválida. De fato, Leonard A. Curchin, da Universidade de Ottawa, e Roger Herz-Fischler repetiram em 1981 a análise com os dados de Duckworth (mas usando a razão m/M) e mostraram que não existe qualquer evidência da Razão Áurea na *Eneida*. Em vez disso, concluíram que a "dispersão aleatória é o que acontece em Virgílio". Além disso, Duckworth "dotou" Virgílio do conhecimento de que a razão entre dois números de Fibonacci consecutivos é uma boa aproximação da Razão Áurea. Curchin e Herz-Fischler, por outro lado, demonstraram de modo convincente que nem Hero de

Alexandria, que viveu depois de Virgílio e foi um dos mais destacados matemáticos de seu tempo, sabia a respeito dessa relação entre a Razão Áurea e os números de Fibonacci.



Figura 91

Infelizmente, a afirmação a respeito de Virgílio e Φ continua a figurar na maior parte da literatura sobre a Razão Áurea, demonstrando mais uma vez o poder do Numerismo Áureo.

Todas as tentativas de descobrir a Razão Áurea (real ou falsa) em várias obras de arte, peças de música ou poesia partem do pressuposto de que um cânone para a beleza ideal existe e pode ser transformado em resultado prático. Mas a história tem mostrado que os artistas que produziram trabalhos de valor duradouro são exatamente aqueles que romperam com tais preceitos acadêmicos. Apesar da importância da Razão Áurea para muitas áreas da matemática e das ciências e para alguns fenômenos naturais, deveríamos, na minha humilde opinião, desistir de suas aplicações como um padrão fixo da estética, seja na forma humana, seja como uma pedra fundamental das belas-artes.

8

DOS LADRILHOS AOS CÉUS

Entender é, no fim das contas, o que motiva a ciência — e ciência é muito mais do que computação sem pensar.

— ROGER PENROSE (1931–)

A história conturbada da Razão Áurea nos levou do século VI a.C. até o período contemporâneo. Duas tendências interligadas costuram estes vinte e seis séculos de história. Por um lado, o mote pitagórico "tudo é número" se materializou espetacularmente no papel que a Razão Áurea representa para os fenômenos naturais que vão da filotaxia ao formato das galáxias. Por outro, a obsessão pitagórica pelo significado simbólico do pentágono se metamorfoseou no que eu acredito que seja uma falsa noção de que a Razão Áurea nos dá um cânone de beleza ideal. Depois de tudo isso, você pode se perguntar se ainda há espaço para mais investigações sobre esta aparentemente simples divisão de uma linha.

O CAMINHO LADRILHADO PARA OS QUASE-CRISTAIS

O pintor holandês Johannes Vermeer (1632-1675) é mais conhecido por suas pinturas de gêneros fantasticamente atraentes, que geralmente mostram uma ou duas figuras engajadas em alguma tarefa doméstica. Em muitas dessas pinturas, uma janela à esquerda do observador ilumina suavemente a sala e o modo como a luz se reflete no chão ladrilhado é puramente mágico. Se você examinar mais atentamente algumas dessas pinturas, verá que muitas delas, como "O concerto", "Uma dama escrevendo uma carta com sua empregada", "Carta de amor" (Figura 92; que estão no Rijksmuseum, Amsterdã) e "A arte da pintura" (Figura 93; que está no Museu Kunsthistorisches, em Viena) têm padrões de ladrilhagem do chão idênticos, formados por quadrados pretos e brancos.



Figura 92



Figura 93

Quadrados, triângulos equiláteros e hexágonos são particularmente fáceis de se usar para ladrilhar quando se quer cobrir o plano inteiro e conseguir um padrão que se repete a intervalos regulares — conhecido como ladrilhagem periódica (Figura 94). Ladrilhos quadrados, simples, não decorados e os padrões que eles formam têm uma simetria quádrupla — quando girados em um quarto de círculo (90 graus), eles continuam iguais. De

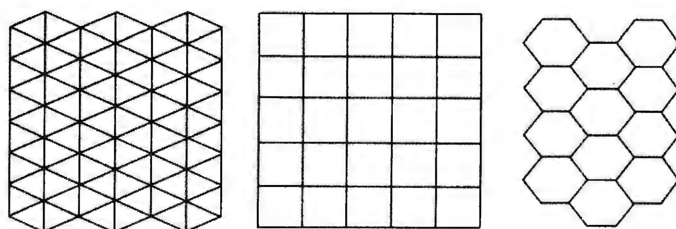


Figura 94

modo semelhante, ladrilhos que são triângulos equiláteros têm uma simetria tripla (eles continuam os mesmos quando rodados em um terço de um círculo, ou 120 graus), e ladrilhos hexagonais têm uma simetria sêxtupla (eles continuam iguais quando girados em 60 graus).

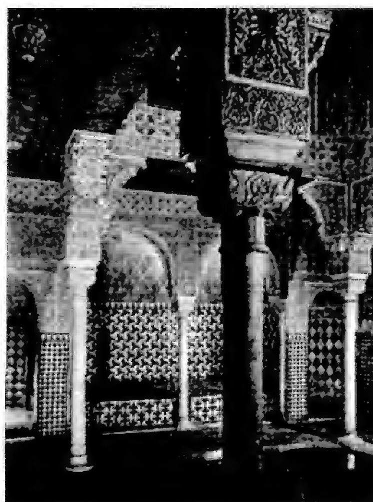


Figura 95

Ladrilhagens periódicas também podem ser geradas com formas mais complicadas. Um dos monumentos mais espantosos da arquitetura islâmica, o palácio-fortaleza Alhambra em Granada, na Espanha, contém numerosos exemplos de intrincada ladrilharia (Figura 95). Alguns desses padrões inspiraram o famoso artista gráfico holandês M. C. Escher (1898-1972), que produziu muitos exemplos imaginativos de ladrilharia (por exemplo, Figura 96), aos quais ele se referia como "divisões do plano".

A figura geométrica plana mais diretamente relacionada à Razão Áurea é, obviamente, o pentágono regular, que tem simetria quíntupla. Pentágonos, porém, não podem ser usados para preencher totalmente o plano e formar um padrão de ladrilhagem periódica. Por mais que você tente, sobrarão espaços vazios. Conseqüentemente, durante muito tempo pensou-se que ne-

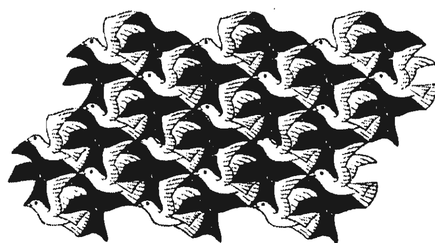


Figura 96

nhum padrão de ladrilharia com ordem de longo alcance poderia exibir uma simetria quíntupla. Contudo, em 1974, Roger Penrose descobriu dois conjuntos básicos de ladrilhos que podem ser encaixados, para preencher o plano todo e exibir a simetria rotativa quíntupla "proibida". Os padrões resultantes não são estritamente periódicos, embora mostrem uma ordem de longo alcance.

As ladrilhagens de Penrose têm a Razão Áurea escrita em todas elas. Um par de ladrilhos que Penrose considerava consiste em dois formatos conhecidos como "dardo" e "pipa" (Figura 97; *a* e *b*, respectivamente). Note que os dois formatos são compostos de triângulos isósceles que aparecem no pentágono (Figura 25). O triângulo no qual a razão do lado para a base é Φ (Figura 97b) é conhecido como Triângulo Áureo, e aquele no qual a razão do lado para a base é 1/Φ (Figura 97a) é aquele conhecido como o Gnômon Áureo. As duas formas podem ser obtidas cortando-se um formato de diamante ou rombo com ângulos de 72 graus e 108 graus, de modo a dividir a diagonal longa em uma Razão Áurea (Figura 98).

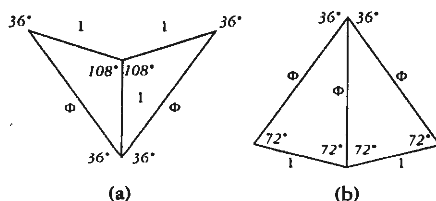


Figura 97

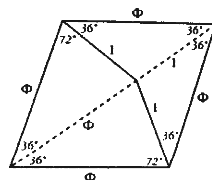


Figura 98

Penrose e o matemático John Horton Conway de Princeton mostraram que, para cobrir todo o plano com dardos e pipas de maneira não-periódica (como na Figura 99), algumas regras de encaixe precisam ser obedecidas.

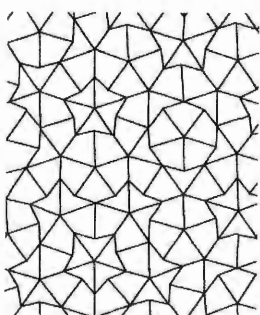


Figura 99

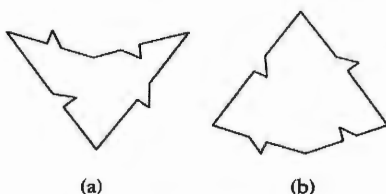


Figura 100

Isto pode ser conseguido adicionando-se "chaves" na forma de entalhes e protuberâncias nos lados das figuras, como nas peças de um quebra-cabeça (Figura 100). Penrose e Conway provaram ainda que dardos e pipas podem preencher o plano de infinitas maneiras não-periódicas, ficando cada padrão que pode ser distinguido cercado por qualquer outro padrão. Uma das

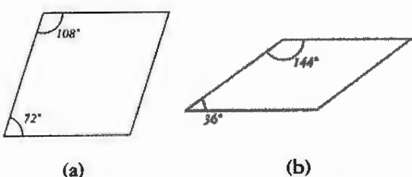


Figura 101

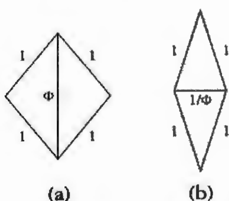


Figura 102

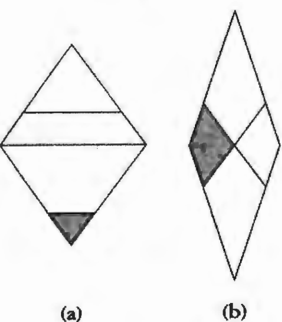


Figura 103

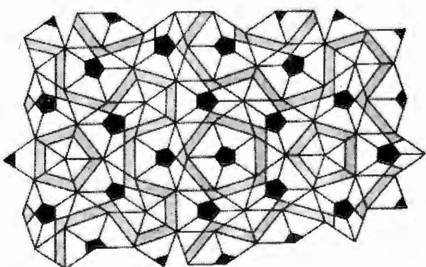


Figura 104

propriedades mais surpreendentes de qualquer desenho de ladrilharia de dardo-pipa de Penrose é que o número de pipas é cerca de 1,618 vezes o número de dardos. Isto é, se denotarmos com N_{pipas} o número de pipas e N_{dardos} o número de dardos, então, N_{pipas}/N_{dardos} se aproxima de Φ à medida que a área considerada aumenta.

Outro par de ladrilhos de Penrose que pode preencher o plano inteiro (não periodicamente) é composto de dois diamantes (rombos), um gordo (obtuso) e outro magro (agudo; Figura 101). Como no par pipa-dardo, cada um dos rombos é composto de dois Triângulos Áureos ou Gnomons Áureos (Figura 102) e regras especiais de encaixe têm de ser obedecidas (neste caso, descritas ao se decorar os lados ou ângulos apropriados do rombo; Figura 103) para se obter um padrão de preenchimento do plano (como na Figura 104). De novo, em grandes áreas, há 1,618 vez mais rombos gordos do que magros, $N_{gordo}/N_{magro} = \Phi$.

Os rombos gordo e magro estão intimamente relacionados aos dardos e pipas e ambos, através da Razão Áurea, ao sistema pentágono-pentagrama. Lembre-se de que o interesse pitagórico pela Razão Áurea começou com as séries infinitas de pentágonos e pentagramas aninhados como na Figura 105. Todos os quatro ladrilhos de Penrose estão escondidos nessa figura. Os pontos B e D marcam as pontas mais distantes da pipa DCBA, enquanto os pontos A e C marcam as "asas" do dardo EABC. Do mesmo modo, você pode encontrar o rombo gordo AECD e o magro (fora da escala) ABCF.

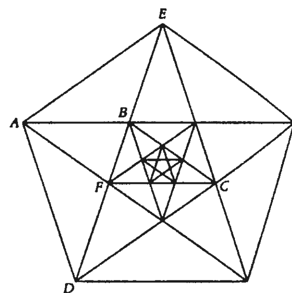


Figura 105

O trabalho de Penrose com ladrilhos foi ampliado para três dimensões. Do mesmo modo como os ladrilhos de duas dimensões podem ser usados para preencher o plano, os "blocos"tridimensionais podem ser usados para preencher espaço. Em 1976, o matemático Robert Ammann descobriu um par de "cubos" (Figura 106), um "espremido" e um "esticado", conhecidos como romboedros, que podem preencher espaços sem intervalos. Ammann também foi capaz de mostrar que, devido a um conjunto de regras de encai-

xe, o padrão que surge é não-periódico e tem as propriedades de simetria do icosaedro (Figura 20e; isto é o equivalente da simetria quíntupla em três dimensões, já que cinco arestas simétricas se encontram em cada vértice). Não surpreende que os dois romboedros sejam Romboedros Áureos — suas faces realmente são idênticas aos rombos dos ladrilhos de Penrose (Figura 101).

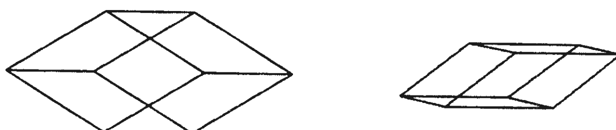


Figura 106

A ladrilharia de Penrose poderia ter permanecido na relativa obscuridade da matemática recreativa, não fosse uma dramática descoberta feita em 1984. O engenheiro de materiais israelense Dany Schectman e seus colaboradores descobriram que os cristais de uma liga de alumínio e manganês exibiam tanto ordem de longo alcance quanto simetria quíntupla. Isso foi quase tão chocante para os cristalógrafos quanto a descoberta de um rebanho de vacas de cinco patas seria para os zoólogos. Durante décadas, físicos do estado sólido e cristalógrafos ficaram convencidos de que sólidos só podiam surgir em duas formas básicas: ou eram cristais extremamente ordenados e totalmente periódicos ou eram completamente amorfos. Em cristais ordenados, como os do sal de cozinha comum, átomos ou grupos de átomos aparecem em motivos exatamente repetidos, chamados *células unitárias*, que formam estruturas periódicas. Por exemplo, no sal, a célula unitária é um cubo, e cada átomo de cloro é cercado por vizinhos de sódio e vice-versa (Figura 107).

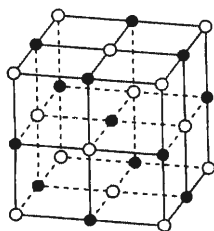


Figura 107

Assim como em um chão perfeitamente ladrilhado, a posição e a direção de cada célula unitária determinam todo o padrão. Por outro lado, nos materiais amorfos, como vidros, os átomos são totalmente desordenados. Da mesma maneira que apenas alguns formatos, como quadrados (com simetria quádrupla),

triângulos (simetria tripla) e hexágonos (simetria sêxtupla) podem preencher completamente o plano com uma ladrilhagem periódica, pensava-se que só existiam cristais com simetria dupla, tripla, quádrupla ou sêxtupla. Os cristais de Schectman provocaram um total atordoamento, pois pareciam ser extremamente ordenados (como cristais periódicos) e exibir simetria quíntupla (ou icosaédrica). Antes dessa descoberta, poucas pessoas suspeitavam que pudesse existir outro estado da matéria, compartilhando aspectos importantes com substâncias cristalinas e com amorfas.

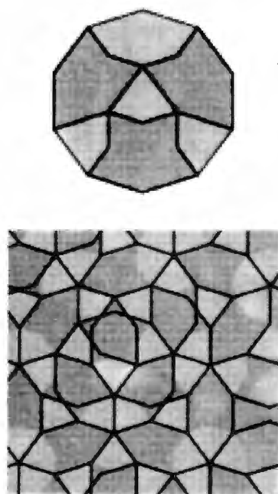


Figura 108

Esses novos tipos de cristais (desde a descoberta original, outras ligas de alumínio foram descobertas) são agora conhecidos como *quase-cristais* — não são amorfos como o vidro ou exatamente periódicos como o sal. Em outras palavras, esses materiais incomuns parecem ter exatamente as propriedades da ladrilharia de Penrose! Mas essa percepção, em si só, tem pouca utilidade para os físicos, que querem entender por que e como os quase-cristais se formam. As regras de emparelhamento de Penrose e Ammann são, neste caso, pouco mais do que um exercício matemático inteligente que não explica o comportamento de átomos reais ou grupos de átomos. Em particular, é difícil imaginar a configuração energética que permite precisamente a existência de dois tipos de agrupamentos (como os dois romboedros de Ammann) na proporção necessária exata em termos de densidade.

Uma pista para uma explicação surgiu em 1991, quando o matemático Sergei E. Burkov, do Instituto Landau de Física Teórica, em Moscou, percebeu que não são necessários dois formatos de ladrilhos para se obter ladrilhagem quase-periódica do plano. Burkov mostrou que a quase-periodicidade podia ser gerada mesmo com o uso de uma única unidade decagonal (dez lados), desde que se permita que os ladrilhos fiquem superpostos — uma propriedade que não havia sido admitida nas tentativas anteriores. Cinco anos mais tarde, o matemático alemão Petra Gummelt, da Universi-

dade Ernst Moritz Arndt, em Greifswald, provou rigorosamente que a ladrilhagem de Penrose poderia ser obtida pelo uso de um único decágono "decorado" combinado com uma regra de superposição específica. Dois decágonos só podem se sobrepor se as áreas hachuradas da decoração ficarem superpostas (Figura 108). O decágono também tem relação estreita com a Razão Áurea — o raio do círculo que circunscreve um decágono com um lado de comprimento de 1 unidade é igual a Φ.

Com base no trabalho de Gummelt, a matemática finalmente poderia ser convertida em física. Os físicos Paul Steinhardt, da Universidade de Princeton, e Hyeong-Chai Jeong, da Universidade de Sejong em Seul, mostraram que as regras puramente matemáticas de unidades superpostas poderiam ser transformadas em uma figura física na qual "células quase-unitárias", que, na verdade, são agrupamentos idênticos de átomos, simplesmente compartilham átomos. Steinhardt e Jeong sugeriram que quase-cristais são estruturas em que agrupamentos de átomos (células quase-unitárias) compartilham átomos com seus vizinhos, em um padrão que é destinado a maximizar a densidade do agrupamento. Em outras palavras, o empacotamento quase-periódico produz um sistema que é o mais estável (maior densidade e menor energia). Steinhardt, Jeong e colaboradores também tentaram verificar esse modelo experimentalmente em 1998. Eles bombardearam uma liga de alumínio, níquel e cobalto quase-cristal com raios X e feixes de elétrons. As imagens da estrutura dos feixes espalhados estavam em notável acordo com a figura dos decágonos superpostos. Isto é mostrado na Figura 109, em que um padrão de ladrilhagem decágono é superposto ao resultado experimental. Experiências mais recentes deram resultados que eram um pouco mais ambíguos. Ainda assim, permanece a impressão geral de que os quase-cristais podem ser explicados pelo modelo de Steinhardt-Jeong.

Imagens de superfícies de quase-cristais (feitas em 1994 e 2001) revelam outra relação fascinante com a Razão Áurea. Usando uma técnica conhecida como microscopia de tunelamento por varredura, cientistas da Universidade da Basiléia, Suíça, e do Laboratório Ames, da Universidade do Estado de Iowa, foram capazes de obter imagens de alta resolução das superfícies de uma liga de alumínio-cobre-ferro e de uma liga de alumínio-

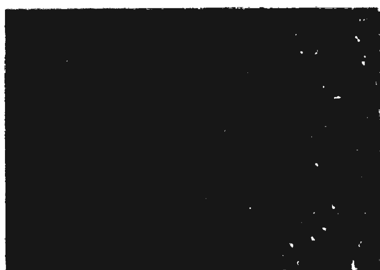


Figura 109



Figura 110

paládio-manganês, que são quase-cristais. As imagens mostram "terraços" planos (Figura 110) terminados em degraus que surgem principalmente em duas alturas, "alto" e "baixo"(ambos medindo apenas uns poucos centésimos de milionésimos de polegada). Descobriu-se que a razão entre as duas alturas era igual à Razão Áurea!

Os quase-cristais são um exemplo magnífico de um conceito que começou como uma entidade puramente matemática (baseada na Razão Áurea), mas que acabou fornecendo uma explicação para um fenômeno natural real. O mais incrível nesse desenvolvimento específico é que o conceito surgiu da matemática *recreativa*. Como os matemáticos poderiam ter "antecipado" descobertas posteriores feitas por físicos? A questão se torna mais intrigante ainda quando lembramos que Dürer e Kepler se mostraram interessados em ladrilharia com simetria quíntupla ainda nos séculos XVI e XVII. Será que até mesmo os temas mais esotéricos da matemática podem acabar encontrando aplicações em fenômenos naturais ou em fenômenos inspirados pelo homem? Voltaremos a este ponto no Capítulo 9.

Outro aspecto fascinante da história dos quase-cristais está relacionado aos dois principais teóricos envolvidos. Tanto Penrose quanto Steinhardt consumiram boa parte de suas carreiras científicas com temas relacionados à cosmologia — o estudo do universo como um todo. Foi Penrose quem descobriu que a Teoria da Relatividade geral de Einstein prevê seus próprios defeitos, pontos nos quais a força da gravidade se torna infinita. Essas singularidades matemáticas correspondem aos objetos que chamamos de *bu-*

racos negros, que são massas comprimidas a tais densidades, que sua gravidade é suficientemente forte para impedir que qualquer luz, massa ou energia escape delas. Observações feitas durante os últimos vinte e cinco anos revelaram que os buracos negros não são apenas conceitos teóricos imaginários, mas objetos reais que existem no Universo. Observações recentes de dois grandes observatórios espaciais, o telescópio espacial Hubble e o Observatório de raios X Chandra mostraram que os buracos negros nem são muito raros. Em vez disso, os centros da maioria das galáxias abrigam monstruosos buracos negros com massas que variam de alguns milhões a alguns bilhões de vezes a massa do nosso sol. A presença dos buracos negros é revelada pelo empuxo gravitacional que eles exercem sobre estrelas e gás na sua vizinhança. De acordo com o modelo padrão do Big Bang, que descreve a origem do nosso Universo inteiro, o cosmo como um todo começou sua expansão a partir de uma tal singularidade — um estado extremamente quente e denso.

Paul Steinhardt foi umas das figuras-chave no desenvolvimento do que é conhecido como o modelo inflacionário do Universo. De acordo com esse modelo, inicialmente proposto pelo físico Alan Guth, do MIT, quando o Universo tinha apenas uma minúscula fração de segundo (0,000...1 com o "1" na 35ª casa decimal), ele iniciou uma expansão fantasticamente rápida, aumentando de tamanho por um fator de mais de 10^{30} (1 seguido de 30 zeros) em uma fração de segundo. Este modelo explica algumas propriedades do Universo que pareceriam enigmáticas sem essa explicação, como o fato de que o Universo parece ser quase exatamente igual em qualquer direção — é primorosamente isotrópico. Em 2001, Steinhardt e colaboradores propuseram uma nova versão sobre o início do Universo, conhecida como o Universo Ekpyrótico (da palavra grega para "conflagração", ou uma repentina explosão de fogo). Nesse modelo ainda muito especulativo, o Big Bang ocorreu quando houve a colisão de dois universos tridimensionais que se moviam em uma oculta dimensão extra.

A pergunta intrigante é: por que esses notáveis cosmólogos decidiram se envolver com matemática recreativa e quase-cristais?

Conheço Penrose e Steinhardt há muitos anos, atuando na mesma área

de astrofísica teórica e cosmologia. Na verdade, Penrose foi um palestrante convidado na primeira grande conferência que eu organizei sobre astrofísica relativística, em 1984, e Steinhardt foi um palestrante convidado na última, em 2001. Ainda assim, eu não sabia o que os motivara a entrar na matemática recreativa, que parece estar bem distante de seus interesses profissionais pela astrofísica, de modo que lhes perguntei.

Roger Penrose respondeu: "Eu não estou certo de ter uma resposta profunda para isso. Como você sabe, a matemática é algo que a maioria dos matemáticos faz por prazer." Após alguma reflexão, ele acrescentou: "Eu costumava brincar com formatos que se encaixam desde pequeno; uma parte de meu trabalho sobre ladrilharia, portanto, é anterior ao meu trabalho em cosmologia. Naquela época, porém, meu trabalho com matemática recreativa era, pelo menos em parte, motivado por minha pesquisa cosmológica. Eu pensava sobre estrutura em larga escala do Universo e procurava modelos de brinquedo com regras básicas simples, que poderiam ainda gerar estruturas complicadas em grande escala."

"Mas", perguntei, "o que é que o levou a continuar a trabalhar naquele problema por tanto tempo?"

Penrose riu e disse: "Como você sabe, eu sempre me interessei por geometria; aquele problema simplesmente me intrigava. Além disso, embora tivesse a intuição de que essas estruturas poderiam ocorrer na natureza, eu simplesmente não conseguia ver como a natureza poderia montá-las por meio do processo normal de crescimento do cristal, que é local. Até certo ponto, ainda estou quebrando a cabeça com isso".

A reação imediata de Paul Steinhardt ao telefone foi: "Boa pergunta!". Depois de pensar a respeito por alguns minutos, ele disse: "Quando era estudante de graduação, eu realmente não tinha certeza do que gostaria de fazer. Então, na pós-graduação, procurei algum tipo de alívio mental dos meus vigorosos esforços em física das partículas e o encontrei no tema da ordem e simetria dos sólidos. Assim que topei com o problema dos cristais quase-periódicos, eu o achei *irresistível* e fiquei voltando a ele".

FRACTAIS

O modelo de Steinhardt-Jeong de quase-cristais tem a interessante propriedade de produzir ordem de longo alcance a partir de interações vizinhas, sem resultar em um cristal totalmente periódico. Surpreendentemente, também podemos descobrir esta propriedade geral na seqüência de Fibonacci. Considere o seguinte algoritmo simples para a criação de uma seqüência conhecida como a Seqüência Áurea. Comece com o número 1 e depois substitua o 1 por 10. Daí por diante, troque cada 1 por 10 e cada 0 por 1. Você obterá as seguintes etapas:

1
10
101
10110
10110101
1011010110110
101101011011010110101

e assim por diante. Obviamente, começamos aqui com uma lei de "curto alcance" (a transformação simples de $0 \rightarrow 1$ e $1 \rightarrow 10$) e obtivemos uma ordem não-periódica de longo alcance. Note que o número de 1s na seqüência de linhas 1, 1, 2, 3, 5, 8... forma uma seqüência de Fibonacci, e também o número de 0s (começando da segunda linha). Além do mais, a razão entre o número de 1s e o número de 0s se aproxima da Razão Áurea à medida que a seqüência cresce. De fato, um exame da Figura 27 revela que, se fizermos com que o 0 represente um par de filhotes de coelho e o 1 um par maduro, então, a seqüência que acabamos de gerar imita precisamente a do número de pares de coelhos. Porém, há ainda mais na Seqüência Áurea além dessas propriedades surpreendentes. Começando com 1 (na primeira linha), seguido do 10 (na segunda linha) e simplesmente anexando, em cada linha, a linha que acabou de precedê-la, podemos também gerar a seqüência inteira. Por exemplo, a quarta linha, 10110, é obtida anexando-se a segunda linha, 10, à terceira linha, 101, e assim por diante.

Lembre-se de que "auto-similaridade" significa simetria através da escala de tamanho. A espiral logarítmica mostra auto-similaridade porque ela parece exatamente a mesma sob qualquer ampliação, assim como a série de pentágonos e pentagramas da Figura 10. Toda vez que você vai a um cabeleireiro, você vê uma série infinita de reflexos auto-similares de você mesmo entre dois espelhos paralelos.

A Seqüência Áurea também é auto-similar em diferentes escalas. Considere a seqüência

1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1...

e investigue-a com uma lente de aumento no seguinte sentido. Começando da esquerda, sempre que você encontrar um 1, marque um grupo de três símbolos, e quando encontrar um 0, marque um grupo de dois símbolos (sem superposição entre os diferentes grupos). Por exemplo, o primeiro dígito é um 1, portanto marcamos o grupo com os primeiros três dígitos 101 (veja abaixo). O segundo dígito a partir da esquerda é um 0, portanto marcamos o grupo de dois dígitos 10 que se *segue* ao primeiro 101. O terceiro dígito é 1, portanto marcamos os três dígitos 101 que se seguem ao 10, e assim por diante. A seqüência marcada agora fica assim

$$\overbrace{101}\ \overbrace{10}\ \overbrace{101}\ \overbrace{101}\ \overbrace{10}\ \overbrace{101}\ldots$$

Agora, de cada grupo de três símbolos, retemos os dois primeiros, e de cada grupo de dois, retemos o primeiro (os símbolos retidos estão sublinhados):

$$\underline{1\ 0}\ 1\ \underline{1}\ 0\ \underline{1\ 0}\ 1\ \underline{1\ 0}\ 1\ \underline{1}\ 0\ \underline{1\ 0}\ 1\ 1\ldots$$

Se você olhar agora a seqüência retida

1 0 1 1 0 1 0 1 1 0...

verá que é idêntica à Seqüência Áurea.

Podemos fazer outro exercício de ampliação da Seqüência Áurea simplesmente sublinhando qualquer padrão ou subseqüência. Por exemplo, suponha que escolhamos "10" como nossa subseqüência e a sublinhemos sempre que ela ocorrer na Seqüência Áurea:

1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0...

Se tratarmos cada 10 como um símbolo único e marcarmos o número de lugares para o qual cada padrão de 10 precisa ser movido, a fim de se sobrepor ao 10 seguinte, chegaremos à seqüência: 2122121... (o primeiro "10" precisa ser deslocado dois lugares para se sobrepor ao segundo, o terceiro é um lugar após o segundo etc.). Se substituirmos agora cada 2 por um 1 e cada 1 por um 0 na nova seqüência, recuperaremos a Seqüência Áurea. Em outras palavras, se observarmos cada padrão dentro da Razão Áurea, descobriremos que o mesmo padrão é encontrado na seqüência em outra escala. Objetos com essa propriedade, como as bonecas Russas Matrioshka, que se encaixam umas nas outras, são conhecidos como *fractais*. O nome "fractal" (do latim *fractus*, que significa "quebrado, fragmentado") foi inventado pelo famoso matemático polonês-franco-americano Benoit B. Mandelbrot e é um conceito fundamental na geometria da natureza e na teoria dos sistemas extremamente irregulares conhecidos como *caos*.

A geometria fractal representa uma tentativa brilhante de descrever as formas e os objetos do mundo real. Quando olhamos à nossa volta, muito poucas formas podem ser descritas em termos das figuras simples da geometria euclidiana, como linhas retas, círculos, cubos e esferas. Uma antiga piada matemática fala de um físico que pensou que poderia ficar rico apostando em corridas de cavalo se resolvesse as equações exatas do movimento dos cavalos. Depois de muito trabalho, ele de fato conseguiu resolver as equações — para cavalos esféricos. Cavalos reais, infelizmente, não são esféricos, nem nuvens, couves-flores ou pulmões. De modo semelhante, relâmpagos, rios e sistemas de drenagem não percorrem linhas retas e todos eles nos lembram as ramificações das árvores e o sistema circulatório humano. Examine, por exemplo, a fantasticamente intrincada ramificação do "Dólmen na Neve" (Figura 111),



Figura 111

uma pintura do artista romântico alemão Caspar David Friedrich (1774-1840; atualmente na Gemäldegalerie Neue Meister, em Dresden).

O gigantesco salto mental de Mandelbrot na formulação da geometria fractal estava principalmente no fato de que ele reconheceu que todos esses complexos ziguezagues não são simplesmente um incômodo, mas, freqüentemente, a característica matemática principal da morfologia. A primeira percepção de Mandelbrot foi sobre a importância da auto-similaridade — o fato de muitas formas naturais mostrarem seqüências infinitas de motivos que se repetiam dentro de motivos em muitas escalas. O náutilo com câmaras (Figura 4) exibe essa propriedade de modo magnífico, como o faz uma couve-flor comum — arranque pedaços cada vez menores, e, até certo ponto, eles continuam a se parecer com o vegetal inteiro. Tire um retrato de um pequeno pedaço de rocha e você terá dificuldade em reconhecer que você não está observando uma montanha inteira. Até mesmo a forma impressa da fração contínua que é igual à Razão Áurea tem essa propriedade (Figura 112) — amplie os símbolos vagamente visíveis e verá a mesma fração contínua. Em todos esses objetos, a ampliação não suaviza o grau de rudeza. As mesmas irregularidades caracterizam todas as escalas.

Neste ponto, Mandelbrot se perguntou, como se determinam as dimensões de algo que tem essa estrutura fracta? No mundo da geometria euclidiana, todos os objetos têm dimensões que podem ser expressas por números inteiros. Pontos têm dimensão zero, linhas retas são unidi-

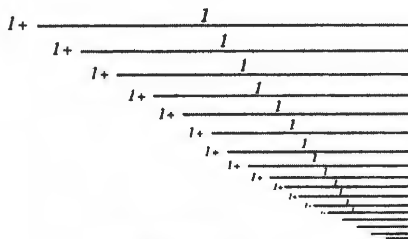


Figura 112

mensionais, figuras planas, como triângulos e pentágonos, são bidimensionais, e objetos como esferas e os sólidos platônicos são tridimensionais. Curvas fractais, como a trajetória de um relâmpago, por outro lado, agitam-se de modo tão violento, que elas estão em algum lugar entre uma e duas dimensões. Se o caminho é relativamente suave, então podemos imaginar que a dimensão fractal seria próxima de um, mas se é muito complexo, então pode-se esperar uma dimensão próxima de dois. Essas reflexões se transformaram na pergunta agora famosa: "Qual é a extensão da costa da Bretanha?" A resposta surpreendente de Mandelbrot é que o comprimento da costa, na verdade, depende do tamanho de sua régua. Suponha que você comece com um mapa da Bretanha, com o lado medindo um pé, gerado por satélite. Você mede o comprimento e o converte para o tamanho real fazendo a multiplicação pela escala conhecida do seu mapa. Obviamente, este método omitirá muitas curvas e reentrâncias do litoral que são pequenas demais para aparecer no mapa. Munido de um bastão de uma jarda (91,4 centímetros), você começa a longa jornada para percorrer as praias, medindo cuidadosamente jarda por jarda. Não há dúvida de que você obterá um número muito maior do que o anterior, já que você conseguiu captar curvas e reentrâncias muito menores. Mas você percebe imediatamente que ainda está omitindo estruturas em escalas menores que uma jarda. O caso é que, cada vez que você diminui o tamanho da sua régua, você obtém um valor maior de comprimento, pois você sempre descobre que existe uma subestrutura em escala ainda menor. Este fato sugere que até o conceito de comprimento representando tamanho precisa ser revisado, quando se lida com fractais. O contorno da costa não se transforma numa linha reta quando ampliado. As dobras persistem em todas as escalas, e o comprimento aumenta *ad infinitum* (ou, pelo menos, até escalas atômicas).

Essa situação é admiravelmente exemplificada pelo que pode ser concebido como a costa de alguma terra imaginária. O floco de neve de Koch é uma curva que foi descrita pela primeira vez pelo matemático sueco Helge von Koch (1870-1924) em 1904 (Figura 113). Comece com um triângulo equilátero que tenha lados medindo um centímetro. Depois, no meio de cada lado, construa um triângulo menor, com o tamanho de um terço

de um centímetro. Isto dará a Estrela de David da segunda figura. Note que a figura original tinha três centímetros de perímetro, enquanto agora temos doze segmentos, cada um com um terço de centímetro, de modo que o comprimento total é agora de quatro centímetros. Repita o procedimento sucessivamente — em cada lado de cada triângulo, ponha um novo, com o comprimento do lado igual a um terço do anterior. A cada vez, a medida do perímetro aumenta por um fator de 4/3 até o infinito, apesar do fato de que ela delimita uma área finita. (Podemos mostrar que a área converge para oito quintos do triângulo original.)

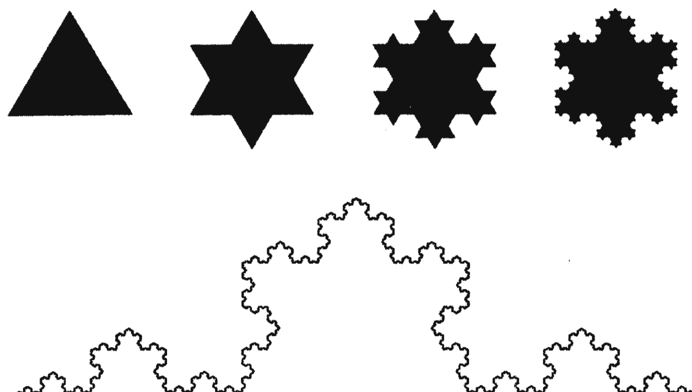


Figura 113

A percepção da existência de fractais suscitou a questão das dimensões que poderiam ser associadas a eles. A dimensão fractal é, na verdade, uma medida da rugosidade do fractal ou da rapidez com que o comprimento, a superfície ou o volume aumentam, se medirmos com relação a escalas cada vez menores. Por exemplo, sentimos intuitivamente que a curva de Koch (parte inferior da Figura 113) toma mais espaço do que uma linha unidimensional, mas menos espaço do que um quadrado bidimensional. Mas como isso pode ter uma dimensão intermediária? Não há, afinal, número inteiro entre 1 e 2. Neste ponto, Mandelbrot usou um conceito introduzido em 1919 pelo matemático alemão Felix

Hausdorff (1868-1942), um conceito que, a princípio, parece surpreendente — dimensões fractais. Apesar do choque inicial que possamos ter com essa noção, dimensões fractais eram exatamente a ferramenta necessária para caracterizar o grau de irregularidade, ou complexidade fractal, dos objetos.

	Segmento de reta	Quadrado	Cubo
Divisão por 2			
Número de objetos resultantes	2	4	8
	2^1	2^2	2^3
Divisão por 3			
Número de objetos resultantes	3	9	27
	3^1	3^2	3^3

Figura 114

Para se obter uma definição coerente da dimensão de auto-similaridade ou dimensão fractal, é útil ter como guia as dimensões inteiras 0, 1, 2, 3. A idéia é examinar quantos objetos pequenos formam um objeto maior em qualquer número de dimensões. Por exemplo, se bissectarmos uma linha (unidimensional), obteremos dois segmentos (para um fator de redução de $f = 1/2$). Quando dividimos um quadrado (bidimensional) em subquadrados com metade do lado (de novo um fator de redução $f = 1/2$), obtemos $4 = 2^2$ quadrados. Para divisão em quadrados com lados de comprimento de um terço ($f = 1/3$), existem $9 = 3^2$ subquadrados (Figura 114). Para um cubo (tridimensional), uma divisão em cubos de metade da aresta ($f = 1/2$) produz $8 = 2^3$ cubos, e de um terço produz $27 = 3^3$ cubos (Figura 114). Se você examinar todos estes exemplos, verá que existe uma relação entre o número de subobjetos, n, o fator de redução de comprimento, f, e a dimensão, D. A relação é simplesmente $n = (1/f)^D$. (Apresento outra forma desta relação no Apêndice 7.) Aplicando essa mesma relação ao floco de neve de Koch, obtém-se uma dimensão fractal de aproximadamente 1,2619. E acontece que a costa da Bretanha também tem uma dimensão fractal de cerca de 1,26. Fractais, portanto, servem de modelo para costas reais. De fato, o pioneiro da teoria do caos Mitch Feigenbaum, da Universidade de Rockefeller, em Nova York, explorou este fato para ajudar a produzir, em 1992, o revolucionário *Hammond Atlas of the World*. Usando computadores para fazer o máximo possível sem ajuda, Feigenbaum examinou dados fractais de satélite para determinar quais os pontos ao longo da costa que têm mais impor-

tância. O resultado: um mapa da América do Sul, por exemplo, que tem precisão superior a 98%, comparado com os convencionais 95% de atlas mais antigos.

Em muitos fractais da natureza, de árvores ao crescimento de cristais, a característica principal é a ramificação. Vamos examinar um modelo extremamente simplificado desse fenômeno onipresente. Comece com um ramo de uma unidade de comprimento, que se divide em dois ramos de comprimento $^1/_2$ com 120 graus (Figura 115). Cada ramo se divide ainda mais de modo semelhante, e o processo continua indefinidamente.

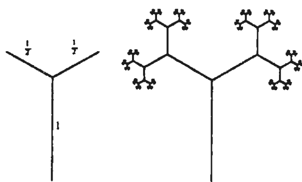


Figura 115

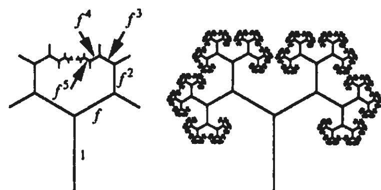


Figura 116

Se em vez de um fator de redução de $^1/_2$ para o comprimento tivéssemos escolhido um número um pouco maior (por exemplo, 0,6), os espaços entre os ramos se reduziriam, e os ramos acabariam se sobrepondo. Obviamente, em muitos sistemas (por exemplo, um sistema de drenagem ou um sistema de circulação do sangue), poderíamos estar interessados em descobrir qual o fator exato de redução que faz com que as ramificações apenas se toquem e comecem a se sobrepor, como na Figura 116. Surpreendentemente (ou talvez não, a esta altura), isto acontece com um fator de redução que é exatamente igual a *um sobre a Razão Áurea*, $1/\Phi = 0{,}618...$ (Uma prova curta é dada no Apêndice 8.) Isto é conhecido como *Árvore Áurea* e sua dimensão fractal é de cerca de 1,4404. A olho nu, após muitas interações, não se pode distinguir muito facilmente a Árvore Áurea e os fractais similares compostos de linhas simples. O problema pode ser parcialmente resolvido com o uso de figuras bidimensionais, como meias-luas (Figura 117), em vez de linhas. Em cada etapa, você pode usar uma máquina de copiar equipada

com um redutor de imagem para produzir meias-luas reduzidas por um fator de 1/Φ. A imagem resultante, uma Árvore Áurea formada de meias-luas, é mostrada na Figura 118.

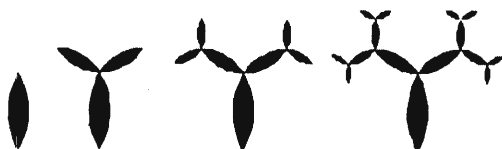


Figura 117

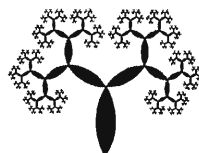


Figura 118

Fractais podem ser construídos não só a partir de linhas, mas também de figuras planas simples, como triângulos e quadrados. Por exemplo, você pode começar com um triângulo equilátero cujo lado tenha uma unidade de comprimento, e em cada canto anexar um novo triângulo com lado ½. Em cada um dos cantos livres dos triângulos de segunda geração, anexe um triângulo com um lado de ¼, e assim por diante (Figura 119). Novamente, você pode se perguntar qual o fator de redução que faz com que esses três ramos comecem a se tocar, como na Figura 120, e novamente a resposta será 1/Φ. Exatamente a mesma situação ocorre se você constrói um fractal similar usando um quadrado (Figura 121) — a superposição ocorre quando o fator de redução for 1/Φ = 0,618... (Figura 122). Além disso, todos os retângulos vazios brancos na última figura são Retângulos Áureos. Descobrimos, portanto, que, enquanto na geometria euclidiana a Razão Áurea se originava do pentágono, na geometria fractal ela está associada a figuras mais simples, como quadrados e triângulos equiláteros.

Depois de se acostumar com o conceito, você percebe que o mundo que nos cerca é cheio de fractais. Objetos tão diversos quanto os perfis de florestas no horizonte e o sistema circulatório do rim podem ser descritos em termos da geometria fractal. Se um modelo particular do Universo como um todo, conhecido como inflação eterna, for correto, então até o Universo inteiro é caracterizado por um padrão fractal. Deixe-me explicar este conceito resumidamente, dando apenas um quadro em rápidas pinceladas. A teoria da infla-

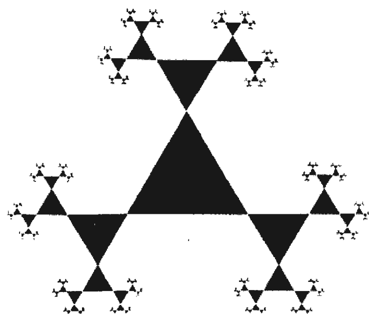


Figura 119

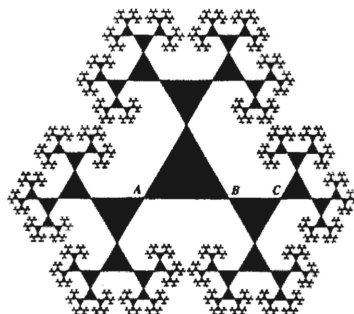


Figura 120

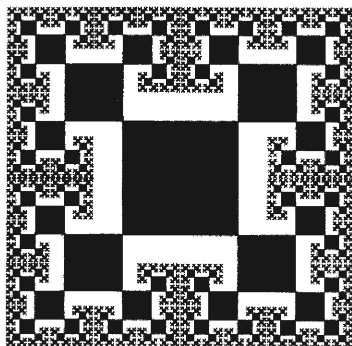


Figura 121

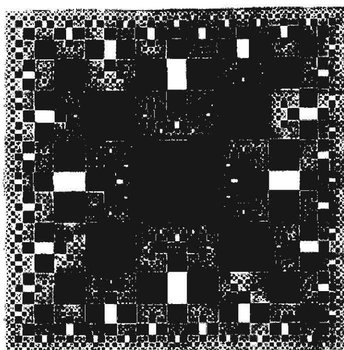


Figura 122

ção, originalmente proposta por Alan Guth, sugere que, quando nosso Universo tinha apenas uma pequena fração de segundo de idade, uma expansão desenfreada ampliou nossa região do espaço a um tamanho que é, na verdade, muito maior do que o alcance de nossos telescópios. A força motriz por trás dessa expansão estupenda é um estado da matéria muito peculiar chamado de falso vácuo. Uma bola no topo plano de um monte, como na Figura 123, pode descrever simbolicamente a situação. Enquanto o Universo permaneceu no estado de falso vácuo (a bola estava no alto do morro), ele se expandiu muito rapidamente, dobrando de tamanho a cada pequena fração de segundo. Somente quando a bola rolou ladeira abaixo até as cercanias, o "fosso" de baixa energia (representando simbolicamente o fato de que o falso

vácuo diminuiu) fez a tremenda expansão parar. Segundo o modelo inflacionário, o que chamamos de *nosso* Universo ficou em um estado de falso vácuo por um período muito curto, durante o qual se expandiu a uma taxa fantástica. Por fim, o falso vácuo decaiu, e nosso Universo retomou a expansão muito mais lenta que observamos hoje. Toda a energia e as partículas subatômicas do nosso Universo foram geradas durante oscilações que se seguiram ao decaimento (representado esquematicamente no terceiro desenho da Figura 123). No entanto, o modelo inflacionário também prevê que a taxa de expansão durante o estado de falso vácuo é muito maior que a taxa de decaimento. Conseqüentemente, o destino de uma região de falso vácuo pode ser ilustrado esquematicamente, como na Figura 124. O Universo começou com alguma região de falso vácuo. À medida que o tempo passou, uma parte (um terço na figura) da região decaiu para produzir um "universo de bolso" como o nosso. Ao mesmo tempo, as regiões que permaneceram no falso vácuo continuaram a se expandir, e na época representada esquematicamente pela segunda barra na Figura 124, cada uma delas tinha o tamanho da primeira barra inteira. (Isto não é mostrado na figura devido à limitação de espaço.) Movendo-se no tempo da segunda para a terceira etapa, o universo de bolso central continuou a evoluir lentamente como no modelo padrão do Big Bang do nosso Universo. Cada uma das duas regiões remanescentes do falso vácuo, porém, evoluiu exatamente da mesma maneira que a região original do falso vácuo — uma parte dela decaiu, produzindo um universo de bolso. Cada região do

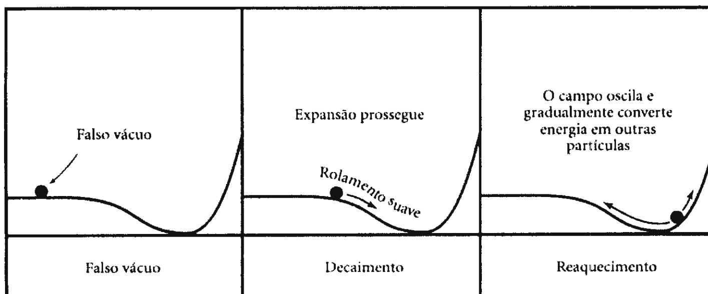


Figura 123

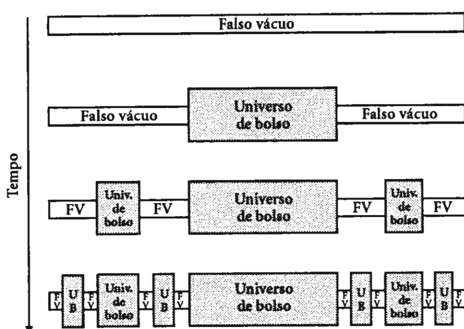


Figura 124

falso vácuo se expandiu para ficar do mesmo tamanho da primeira barra (de novo, não mostradas na figura devido à limitação de espaço). Portanto, um número infinito de universos de bolso foi produzido e um padrão fractal foi gerado — a mesma seqüência de réplicas de vácuos falsos e universos de bolso é feita em escalas cada vez menores. Se este modelo representa realmente a evolução de todo o Universo, então nosso universo de bolso é apenas um de um número infinito de universos de bolso que existem.

Em 1990, o professor Jasper Memory, da Universidade da Carolina do Norte, publicou um poema intitulado "Blake and Fractals" na *Mathematics Magazine*. Referindo-se à frase do poeta místico William Blake "To See a World in a Grain of Sand", Memory escreveu:

William Blake disse que poderia ver
A visão do infinito
Na menor partícula de areia
Segura na concha de sua mão.
Modelos para esta afirmação temos
Na obra de Mandelbrot:
Diagramas fractais compartilham
Da essência sentida por Blake.
Formas básicas ainda prevalecerão
Independentes da escala;
Vistas de longe ou vistas de perto
Assinaturas especiais são claras.
Quando você amplia um ponto,
Que você tinha antes, você tem.

Menor, menor, menor, contudo,
Ainda com os mesmos detalhes;
Mais fino que o mais fino cabelo
O infinito de Blake está lá,
Rico em estrutura durante todo o tempo —
Exatamente como dizem os poetas místicos.

Algumas das aplicações recentes da Razão Áurea, dos números de Fibonacci e dos fractais alcançam áreas que são muito mais pé no chão que o modelo inflacionário do Universo. De fato, alguns dizem que as aplicações podem alcançar inclusive o caminho até os nossos bolsos.

UM *TOUR* ÁUREO POR WALL STREET

Uma das tentativas mais conhecidas de se usar a seqüência de Fibonacci e a Razão Áurea na análise do preço de ações está associada ao nome de Ralph Nelson Elliott (1871-1948). Contador por profissão, Elliott teve vários cargos executivos em companhias de trens, principalmente na América Central. Uma doença grave no trato gástrico que o deixou acamado obrigou-o a se aposentar em 1929. Para ocupar a mente, Elliott começou a analisar detalhadamente as quedas e as recuperações do índice Dow Jones. Durante sua vida, Elliott testemunhou o formidável mercado comprador dos anos 1920 seguido da Grande Depressão. Suas análises detalhadas o levaram a concluir que as flutuações do mercado não eram aleatórias. Em particular, ele notou que "o mercado de ações é uma criação do homem e, portanto, reflete a idiossincrasia humana". A principal observação de Elliott foi que, no fim das contas, os padrões do mercado de ações refletem ciclos do otimismo e do pessimismo humanos.

Em 19 de fevereiro de 1935, Elliott enviou um tratado intitulado *O Princípio da Onda* para uma publicação sobre o mercado de ações em Detroit. Nele,

Elliott afirmava haver identificado características que "forneciam um princípio que determina a tendência e dá claro aviso de reversão". O tratado acabou evoluindo para um livro com o mesmo título, que foi publicado em 1938.

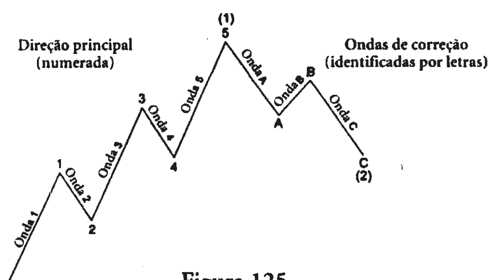


Figura 125

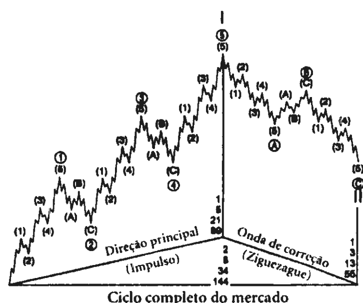


Figura 126

A idéia básica de Elliott era relativamente simples. Ele afirmava que as variações do mercado podem ser caracterizadas por um padrão fundamental que consiste em cinco ondas durante uma tendência de alta ("otimista", marcada por números na Figura 125) e três ondas durante uma tendência de baixa ("pessimista", marcada por letras na Figura 125). Note que 5, 3 e 8 (o número total de ondas) são todos números de Fibonacci. Elliott ainda asseverou que um exame da flutuação em escalas de tempo cada vez menores revela que o mesmo padrão se repete (Figura 126), com todos os números das ondas que o constituem correspondendo a números de Fibonacci mais altos. Identificando 144 como "o maior número de valor prático", a quebra de um ciclo de mercado completo, segundo Elliott, pode ter o aspecto que se segue. Uma tendência geral de alta formada por cinco ondas grandes, vinte e uma ondas intermediárias e oitenta e nove ondas menores (Figura 126) é seguida por uma fase de tendência geral de queda com três ondas maiores, treze intermediárias e cinqüenta e cinco ondas menores (Figura 126).

Alguns livros recentes que tentam aplicar as idéias gerais de Elliott a estratégias reais de negociação vão ainda mais longe. Eles usam a Razão Áurea para calcular pontos extremos de máximo e mínimo que podem ser esperados (embora não necessariamente atingidos) nos preços de mercado no fim de tendências de alta ou baixa (Figura 127). Até mesmo algoritmos mais

sofisticados incluem uma espiral logarítmica desenhada no topo de flutuações de mercado diárias, numa tentativa de representar uma relação entre preço e tempo. Todos esses esforços de previsão supõem que a seqüência de Fibonacci e a Razão Áurea de algum modo fornecem as chaves para a operação de psicologia de massa. Contudo, esse método de "onda" tem alguns defeitos. A "onda" de Elliott geralmente está sujeita a vários esticamentos, contrações e outras alterações manuais (às vezes arbitrárias) para "prever" o mercado do mundo real. Mas os investidores sabem que, mesmo com a aplicação de todas as filigranas da moderna teoria de carteiras, que supostamente maximiza os retornos para um nível de risco predeterminado, fortunas podem ser ganhas ou perdidas num piscar de olhos.

Você pode ter notado que a interpretação da onda de Elliott tem como um de seus ingredientes a idéia de que cada parte da curva é uma versão em escala reduzida do todo, um conceito fundamental na geometria fractal. De fato, em 1997, Benoit Mandelbrot publicou um livro intitulado *Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk* (Fractais e escala em finanças: descontinuidade, concentração e risco) que introduziu modelos fractais bem definidos na economia de mercado. Mandelbrot se baseou no conhecido fato de que flutuações no mercado de ações parecem iguais quando os gráficos são aumentados ou reduzidos para se ajustarem preços e escalas de tempo. Olhando esses gráficos de uma distância que não permita ler as escalas, você não será capaz de dizer se eles representam variações diá-

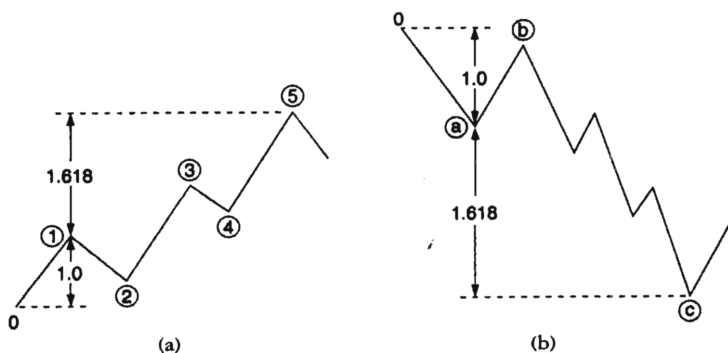


Figura 127

rias, semanais ou de hora em hora. A principal inovação da teoria de Mandelbrot, comparada à teoria padrão de carteiras, é sua capacidade de reproduzir tanto negociações tumultuadas como mercados tranqüilos. A teoria de carteiras, por outro lado, é capaz de caracterizar apenas uma atividade relativamente tranqüila. Mandelbrot nunca afirmou que sua teoria poderia prever uma queda ou uma alta de preços em um dia específico, mas sim que seu modelo poderia ser usado para se calcular probabilidades de resultados. Depois que Mandelbrot publicou uma descrição simplificada de seu modelo na *Scientific American* em fevereiro de 1999, houve uma infinidade de respostas de leitores. Robert Ihnot, de Chicago, provavelmente exprimiu o espanto de muitos quando escreveu: "Se sabemos que uma ação irá de U$10 para U$15 em um determinado período de tempo, não importa como interpomos os fractais, ou se o gráfico parece autêntico ou não. O importante é que nós poderíamos comprar a U$10 e vender a U$15. Todos nós deveríamos estar ricos, então por que não estamos?"

O princípio original das ondas de Elliott representou uma ousada, embora um tanto ingênua, tentativa de identificar um padrão no que poderia parecer um processo aleatório. Mais recentemente, contudo, os números de Fibonacci e o acaso tiveram um encontro ainda mais intrigante.

COELHOS E LANCES DE MOEDAS

A propriedade definidora da seqüência de Fibonacci — de que cada novo número é a soma dos dois números anteriores — foi obtida a partir de uma descrição irrealista do acasalamento de coelhos. Nada nessa definição indicava que essa seqüência imaginária de coelhos poderia encontrar seu caminho entre tantos fenômenos naturais e culturais. E menos ainda sugerir que um experimento com as propriedades básicas da seqüência poderia fornecer uma abertura para a compreensão da matemática de sistemas desordenados. Mas foi exatamente isto o que aconteceu em 1999. O cientista da computação Divakar Viswanath, então um aluno de pós-doutorado no Mathematical Sciences Research Institute, em Berkeley, na Califórnia,

foi suficientemente audacioso para se fazer uma pergunta do tipo "e se?" que levou inesperadamente à descoberta de um novo número especial: 1,13198824... A beleza da descoberta de Viswanath está sobretudo na simplicidade da sua idéia central. Viswanath simplesmente se perguntou: suponha que você comece com os dois números 1, 1, como na seqüência original de Fibonacci, mas agora, em vez de somar os dois números para obter o terceiro, você joga uma moeda para decidir se soma os dois ou subtrai o último número do anterior. Você pode decidir, por exemplo, que "cara" (*heads*) significa somar (dando 2 como o terceiro número) e "coroa" (*tails*) significa subtrair (dando 0 como o terceiro número). Você pode continuar com o mesmo procedimento, cada vez jogando uma moeda, para decidir se soma ou subtrai o último número para obter um novo. Por exemplo, a série de lances de moeda HTTHHTHTTH produzirá a seqüência 1, 1, 2, –1, 3, 2, 5, –3, 2, –5, 7, 2. Por outro lado, a série (bastante improvável) HHHHHHHHHHHH... resultará na seqüência de Fibonacci original.

Na seqüência de Fibonacci, os termos crescem rapidamente, como uma potência da Razão Áurea. Lembre-se de que podemos calcular o décimo sétimo número da seqüência, por exemplo, elevando a Razão Áurea à décima sétima potência, dividindo pela raiz quadrada de 5 e arredondando o resultado para o número inteiro mais próximo (que é 1597). Como as seqüências de Viswanath foram geradas por uma série totalmente aleatória de caras e coroas, não era óbvio que um padrão suave de crescimento seria obtido, mesmo se ignorássemos os sinais de menos e tomássemos apenas o valor absoluto dos números. Mas para sua própria surpresa, Viswanath descobriu que, se ele ignorasse os sinais de menos, os valores dos números em suas seqüências aleatórias ainda cresceriam a uma taxa claramente definida e previsível. Especificamente, com uma probabilidade de essencialmente 100%, o centésimo número em qualquer das seqüências geradas desta maneira era sempre próximo da centésima potência do número peculiar 1,13198824..., e quanto mais alto fosse o termo da seqüência, mais próximo ele ficaria da potência correspondente de 1,13198824... Para calcular realmente esse número estranho, Viswanath teve de usar fractais e se valer de um poderoso teorema matemático que foi formulado no início dos anos

1960 pelos matemáticos Hillel Furstenberg, da Universidade Hebraica em Jerusalém, e Harry Kesten, da Universidade de Cornell. Esses dois matemáticos provaram que, para uma classe inteira de seqüências geradas aleatoriamente, o valor absoluto de um número alto na seqüência se aproxima cada vez mais da potência apropriada de algum número fixo. Entretanto, Furstenberg e Kesten não sabiam como calcular esse número fixo. Viswanath descobriu justamente como fazer isso.

A importância do trabalho de Viswanath se deve não só à descoberta de uma nova constante matemática, um feito significativo em si mesmo, mas também ao fato de que isso ilustra muito bem como aquilo que aparenta ser um processo totalmente aleatório pode levar a um resultado inteiramente determinístico. Problemas desse tipo são encontrados em vários fenômenos naturais e dispositivos eletrônicos. Por exemplo, estrelas como o nosso Sol produzem sua energia em "fornalhas" nucleares em seus centros. No entanto, para vermos realmente as estrelas brilhando, feixes de radiação conhecidos como fótons têm de chegar das profundezas estelares até a superfície. Fótons não voam simplesmente através da estrela na velocidade da luz. Eles pulam por todo lugar, sendo espalhados, absorvidos e reemitidos por todos os elétrons e átomos de gás no seu caminho, de um modo aparentemente aleatório. Porém, o resultado é que, após um passeio aleatório, que, no caso do Sol, leva cerca de 10 milhões de anos, a radiação escapa da estrela. A potência emitida pela superfície do Sol determinou (e continua a determinar) a temperatura na superfície da Terra e permitiu o surgimento da vida. O trabalho de Viswanath e a pesquisa sobre as seqüências aleatórias de Fibonacci que se seguiram fornecem ferramentas adicionais para a maquinaria matemática que explica sistemas desordenados.

Há outra importante lição a ser aprendida com a descoberta de Viswanath — até mesmo um problema matemático aparentemente trivial de oitocentos anos ainda pode surpreendê-lo.

9

SERÁ QUE DEUS É UM MATEMÁTICO?

Eu deveria tentar tratar o vício e a loucura humanos geometricamente... as paixões causadas por ódio, raiva, inveja, e assim por diante, consideradas em si, seguem a necessidade e a eficácia da natureza... Tratarei, portanto, a natureza e força da emoção exatamente da mesma maneira, como se eu estivesse preocupado com linhas, planos e sólidos.

— BARUCH SPINOZA (1632-1677)

Para o matemático, dois e dois são quatro, apesar do lamento do amador por um três, ou do brado do crítico por um cinco.

— JAMES MCNEILL WHISTLER (1834-1903)

Euclides definiu a Razão Áurea porque estava interessado em usar esta proporção simples na construção do pentágono e do pentagrama. Se esta fosse a única aplicação da Razão Áurea, este livro nunca teria sido escrito. O prazer que extraímos desse conceito hoje se baseia principalmente no elemento *surpresa*. Por uma lado, a Razão Áurea veio a se tornar a mais simples das

frações contínuas (mas também o "mais irracional" de todos os números irracionais) e, por outro lado, o coração de um número infinito de fenômenos naturais complexos. De certa forma, a Razão Áurea sempre aparece inesperadamente na justaposição do simples e do complexo, na interseção da geometria euclidiana com a geometria dos fractais.

A sensação de gratificação gerada pelo aparecimento de surpresa da Razão Áurea provavelmente está tão próximo quanto poderíamos esperar do sensual prazer visual que obtemos de uma obra de arte. Este fato suscita a questão sobre o tipo de julgamento estético que pode ser aplicado à matemática ou, mais especificamente, sobre o que de fato quis dizer o matemático britânico Godfrey Harold Hardy (1877-1947) quando afirmou: "Os padrões de um matemático, assim como os de um pintor ou de um poeta, devem ser belos."

Esta não é uma questão simples. Quando abordei as experiências psicológicas que testaram o apelo visual do Retângulo Áureo, evitei deliberadamente o termo "belo". Adotarei aqui a mesma estratégia devido à ambigüidade associada à definição de beleza. Até que ponto a beleza está nos olhos de quem a vê, quando se refere à matemática, é exemplificado magnificamente pela história apresentada no excelente livro *A Experiência Matemática*, de Philip J. Davis e Reuben Hersh, de 1981.

Em 1976, uma delegação de eminentes matemáticos dos Estados Unidos foi convidada a ir à República Popular da China para uma série de debates e encontros informais com matemáticos chineses. A delegação divulgou posteriormente um relatório intitulado "Matemática Pura e Aplicada da República Popular da China". Com "pura", os matemáticos normalmente se referem a um tipo de matemática que, pelo menos aparentemente, não tem importância para o mundo fora da mente. Ao mesmo tempo, deveríamos perceber que a ladrilharia de Penrose e os números aleatórios de Fibonacci, por exemplo, fornecem dois dos numerosos exemplos de matemática "pura" que se torna matemática "aplicada". Um dos diálogos no relatório da delegação, entre o matemático de Princeton Joseph J. Kohn e um dos anfitriões chineses, é particularmente esclarecedor. O diálogo era sobre o tema da "beleza da matemática", e ocorreu na Universidade Hua-Tung, de Xangai.

Kohn: Será que você não deveria apresentar a beleza da matemática? Ela não poderia inspirar os estudantes? Existe lugar para a beleza na ciência?

Resposta: A primeira necessidade é a produção.

Kohn: Isso não é resposta.

Resposta: A geometria foi desenvolvida para a prática. A evolução da geometria não poderia satisfazer a ciência e a tecnologia. No século XVII, Descartes descobriu a geometria analítica. Ele analisou pistões e tornos mecânicos e também os princípios da geometria analítica. O trabalho de Newton resultou do desenvolvimento da indústria. Newton disse: "A base de qualquer teoria é a prática social." Não existe teoria da beleza sobre a qual as pessoas concordem. Algumas pessoas acham uma coisa bonita; outras, não. A construção socialista é algo bonito e estimula as pessoas aqui. Antes da Revolução Cultural, alguns de nós acreditavam na beleza da matemática, mas não conseguiram resolver problemas práticos; agora lidamos com canos de água e gás, cabos e laminação. Nós o fazemos, para que o país e os trabalhadores o apreciem. É uma bela sensação.

Visto que, como este diálogo indica perfeitamente, não existe qualquer descrição formal aceita de julgamento estético na matemática nem de como ela deveria ser aplicada, prefiro abordar apenas um elemento particular da matemática que invariavelmente dá prazer tanto aos especialistas quanto aos não-especialistas — o elemento surpresa.

A MATEMÁTICA DEVERIA SURPREENDER

Em uma carta escrita em 27 de fevereiro de 1818, o poeta romântico inglês John Keats (1795-1821) escreveu: "A poesia deveria surpreender devido a um belo excesso, não pela Singularidade — ela deveria surpreender o Leitor como uma expressão de seus próprios pensamentos mais elevados e pa-

recer quase uma Recordação." Mas, ao contrário da poesia, a matemática mais freqüentemente tende a encantar quando exibe um resultado inesperado, do que quando vai ao encontro das expectativas do leitor. Além disso, o prazer extraído da matemática está relacionado, em muitos casos, à surpresa sentida com a percepção de relações e unidades totalmente inesperadas. Uma relação matemática conhecida como lei de Benford fornece um maravilhoso estudo de caso sobre como todos esses elementos se combinam para produzir uma grande sensação de satisfação.

Dê uma olhada, por exemplo, no *World Almanac*, na tabela de "Mercado Agrícola por estado dos Estados Unidos", de 1999. Há uma coluna para "Colheita" e uma para "Criação de Gado e Produtos." Os números estão em dólares americanos. Você poderia achar que os números de 1 a 9 deveriam ocorrer com a mesma freqüência como primeiros dígitos de todos os itens. Especificamente, os números que começam com 1 deveriam constituir cerca de um nono de todos os números listados, o mesmo ocorrendo com os números que começam com 9. Contudo, se você contá-los, verá que o algarismo 1 aparece como primeiro dígito em 32% dos números (em vez dos esperados 11%, se todos os dígitos ocorressem com a mesma freqüência). O algarismo 2 também aparece mais freqüentemente do que seria de se esperar, aparecendo em 19% dos números. O dígito 9, por outro lado, aparece somente em 5% dos números — menos que o esperado. Você pode pensar que descobrir este resultado em uma tabela é surpreendente, mas dificilmente chocante, até que você examine mais algumas páginas do *Almanac* (os números acima foram extraídos da edição de 2001). Por exemplo, se você observar a tabela do número de mortos de "Alguns dos maiores terremotos", descobrirá que os números que começam com 1 constituem cerca de 38% de todos os números e os que começam por 2 correspondem a 18%. Se você escolher uma tabela totalmente diferente, como a tabela da população de Massachusetts em lugares com 5 mil habitantes ou mais, verá que os números começam com 1 em cerca de 36% das vezes e com 2 em cerca de 16,5%. No fim, em todas essas tabelas, o número 9 aparece como primeiro dígito somente em cerca de 5% dos números, bem menos que os

esperados 11%. Como é possível que tabelas que descrevem dados tão diversos e aparentemente tão aleatóricos tenham todas como característica o fato de o número 1 aparecer como primeiro dígito em cerca de 30% das vezes e o número 2 em cerca de 18% das vezes? A situação fica ainda mais enigmática quando você examina um conjunto de dados ainda maior. Por exemplo, o professor de contabilidade Mark Nigrini, da Cox School of Business da Southern Methodist University, em Dallas, examinou as populações de 3.141 condados no censo dos Estados Unidos de 1990. Ele descobriu que o número 1 aparece como primeiro dígito em cerca de 32% dos números; o 2, em cerca de 17%; o 3, em 14% e o 9, em menos de 5%. O analista Eduardo Ley, da Resources for the Future, de Washington, D. C., encontrou números bem semelhantes no índice Dow Jones nos anos entre 1990 e 1993. E se tudo isso não o deixa suficientemente aturdido, aqui vai um outro fato surpreendente. Se você examinar a lista de, digamos, os primeiros dois mil números de Fibonacci, descobrirá que o número 1 aparece como primeiro dígito em 30% das vezes; o 2, 17,65%; o 3, em 12,5%, e os valores continuam a decrescer, com o número 9 aparecendo em 4,6% das vezes como primeiro dígito. De fato, é mais provável que os números de Fibonacci comecem por 1, sendo os outros números menos populares *exatamente da mesma maneira da recém-descrita seleção aleatória de números*!

O astrônomo e matemático Simon Newcomb (1835-1909) foi, em 1881, o primeiro a descobrir este "fenômeno do primeiro dígito". Ele percebeu que os livros de logaritmos da biblioteca, que eram usados para cálculos, estavam mais sujos no começo (onde estavam impressos os números que começam com 1 e 2) e ficavam progressivamente mais limpos daí em diante. Embora se possa esperar isto em romances ruins, abandonados por leitores entediados, no caso de tabelas matemáticas isto simplesmente indicava uma freqüência maior dos números que começavam com 1 ou 2. Newcomb, contudo, foi muito além da percepção deste fato; ele surgiu com uma fórmula efetiva que supostamente indicaria a probabilidade de que um número aleatório começasse com um determinado dígito. Essa fórmula (apresentada no Apêndice 9) atribui ao número 1 uma probabilidade de

30%; ao 2, cerca de 17,6%; ao 3, cerca de 12,5%; ao 4, cerca de 9,7%; ao 5, cerca de 8%; ao 6, cerca de 6,7%; ao 7, cerca de 5,8%; ao 8, cerca de 5% e ao 9, cerca de 4,6%. O artigo de Newcomb de 1881 no *American Journal of Mathematics* e a "lei"que ele descobriu passaram despercebidos, até que, 57 anos depois, o físico Frank Benford, da General Electric, redescobriu a lei (aparentemente de forma independente) e a testou com vários dados sobre áreas de bacias de rios, com estatísticas de beisebol e até com números que apareciam em artigos da *Reader's Digest.* Todos os dados se ajustaram à fórmula postulada de maneira surpreendente, e por isso esta fórmula hoje é conhecida como lei de Benford.

Nem todas as listas de números obedecem à lei de Benford. Números de catálogos telefônicos, por exemplo, tendem a começar com os mesmos poucos dígitos em qualquer região. Nem mesmo tabelas de raízes quadradas de números obedecem à lei. Por outro lado, é possível, se você coletar todos os números que aparecem na primeira página das páginas de vários jornais da sua região durante uma semana, você descubra um bom ajuste. Mas por que deveria ser dessa maneira? O que as populações das cidades de Massachusetts têm a ver com o número de mortos em terremotos ao redor do globo ou com os números que aparecem na *Reader's Digest*? Por que os números de Fibonacci também obedecem à mesma lei?

As tentativas de se colocar a lei de Benford em uma sólida base matemática acabaram sendo mais difíceis do que se esperava. Um dos principais obstáculos tem sido justamente o fato de que nem todas as listas de números obedecem à lei (nem mesmo os número dos exemplos anteriores do *Almanac* obedecem exatamente à lei). No seu artigo para a *Scientific American* em que descrevia a lei, em 1969, o matemático Ralph A. Raimi, da Universidade de Rochester, concluiu: "A resposta permanece obscura."

A explicação surgiu finalmente em 1995-1996, no trabalho do matemático Ted Hill, do Georgia Institute of Technology. Hill primeiro se interessou pela lei de Benford, quando preparava uma palestra sobre surpresas em probabilidade, no início da década de 1990. Quando estava me descrevendo sua experiência, ele disse: "Comecei a trabalhar nesse problema como

uma experiência recreativa, mas algumas pessoas me avisaram para ter cuidado, porque a lei de Benford pode tornar-se um vício." Após alguns anos de trabalho, começou a ficar claro para ele que, em vez de observar os números de uma determinada fonte, a mistura dos dados era a chave. Hill formulou a lei estatisticamente, de uma nova forma: "Se distribuições são selecionadas aleatoriamente (de qualquer maneira não-tendenciosa), e amostras aleatórias são tiradas de cada uma dessas distribuições, então as freqüências de dígitos significativos da amostra combinada convergirão para a distribuição de Benford, mesmo que algumas das distribuições selecionadas não sigam a lei." Em outras palavras, suponha que você reúna séries aleatórias de números de uma miscelânea de distribuições, como uma tabela de raízes quadradas, uma tabela do número de mortos em desastres aéreos, as populações de condados e uma tabela de distâncias aéreas entre cidades selecionadas do mundo. Algumas dessas distribuições não obedecem à lei de Benford por si mesmas. O que Hill provou, contudo, é que, à medida que você coleta uma quantidade crescente de números desse tipo, os dígitos desses números vão gerar freqüências que ficam cada vez mais próximas das previsões da lei de Benford. Então, por que os números de Fibonacci também seguem essa lei? Afinal de contas, eles são totalmente determinados por uma relação recursiva e não são amostras aleatóricas de distribuições aleatórias.

Bem, neste caso, acontece que essa conformidade à lei de Benford não é uma propriedade exclusiva dos números de Fibonacci. Examinando uma grande quantidade de potências de 2 ($2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$ etc.), você perceberá que elas também obedecem à lei de Benford. Isto não deveria ser tão surpreendente, já que os próprios números de Fibonacci são obtidos como potências da Razão Áurea (lembre-se de que o *n-ésimo* número de Fibonacci é próximo de $\Phi^n / \sqrt{5})$. De fato, podemos provar que seqüências definidas por uma ampla classe de relações recursivas obedecem à lei de Benford.

A lei de Benford fornece ainda outro exemplo fascinante de matemática pura transformada em aplicada. Uma aplicação interessante está na detecção de fraudes ou fabricação de dados em contabilidade e em evasão fiscal. Em

uma ampla gama de documentos financeiros, os dados se amoldam bem à lei de Benford. Dados fabricados, por outro lado, muito raramente o fazem. Hill demonstra como essas descobertas de fraudes funcionam com um outro exemplo simples, usando a teoria das probabilidades. No primeiro dia de aula em seu curso sobre probabilidade, ele pede aos alunos que façam uma experiência. Se o nome de solteira de suas mães começar com qualquer uma das letras de A a L, eles devem jogar uma moeda 200 vezes e registrar os resultados. Ele pede ao resto da turma para forjar uma seqüência de 200 caras e coroas. Hill recolhe os resultados no dia seguinte, e em pouco tempo é capaz de separar as seqüências verdadeiras das forjadas com 95% de precisão. Como ele faz isso? Qualquer seqüência de 200 lançamentos reais de moedas contém uma série de seis caras ou seis coroas sucessivas com uma grande probabilidade. Por outro lado, as pessoas que tentam forjar uma seqüência de lançamento de moedas muito raramente acreditam que elas deveriam registrar uma seqüência como esta.

Um caso recente em que a lei de Benford foi usada para revelar uma fraude envolveu uma agência americana de viagens. O diretor de auditoria da empresa descobriu algo que lhe pareceu estranho nas solicitações feitas pelo supervisor do departamento de assistência médica da companhia. Os primeiros dois dígitos dos pagamentos de assistência médica mostravam um pico suspeito nos números que começavam com 65, quando comparados ao que dizia a lei de Benford para esses números. (Uma versão mais detalhada da lei prevê também a freqüência do segundo e de outros dígitos maiores; ver Apêndice 9.) Uma auditoria minuciosa revelou 13 cheques fraudulentos em quantias entre U$6.500 e U$6.599. O escritório do procurador distrital no Brooklyn, em Nova York, também usou testes baseados na lei de Benford para detectar fraudes contábeis em sete empresas de Nova York.

A lei de Benford contém justamente alguns dos elementos de surpresa que a maioria dos matemáticos acha atraente. Ela reflete um fato simples mas admirável — que a distribuição dos primeiros dígitos é extremamente peculiar. Além disso, esse fato acabou sendo difícil de explicar. Números, sendo a Razão Áurea um exemplo destacado, às vezes proporcionam uma

gratificação instantânea. Por exemplo, muitos matemáticos profissionais e amadores são fascinados pelos números primos. Por que eles são tão importantes? Porque o "Teorema Fundamental da Aritmética" afirma que qualquer número inteiro maior que 1 pode ser expresso como um produto de números primos. (Note que 1 não é considerado um primo.) Por exemplo, 28 = 2 × 2 × 7; 66 = 2 × 3 × 11, e assim por diante. Os primos estão tão arraigados na compreensão humana da matemática, que em seu livro *Cosmo*, quando Carl Sagan (1934-1996) teve de descrever que tipo de sinal uma civilização inteligente transmitiria através do espaço, ele escolheu como exemplo uma seqüência de primos. Sagan escreveu: "É extremamente improvável que qualquer processo físico natural pudesse transmitir mensagens de rádio contendo somente números primos. Se recebêssemos uma mensagem assim, deduziríamos a existência de uma civilização lá fora que seria, no mínimo, apegada aos números primos." O grande Euclides provou há mais de dois mil anos que existem infinitos primos. (A elegante prova é apresentada no Apêndice 10.) Contudo, a maioria das pessoas concordará que alguns primos são mais atraentes que outros. Alguns matemáticos, como François Le Lionnais, da França, e Chris Caldwell, dos Estados Unidos, mantêm listas de números "notáveis" ou "titânicos". Aqui estão apenas alguns exemplos intrigantes do grande tesouro dos primos:

- O número 1.234.567.891, que passa por todos os dígitos, é um primo.
- O 230º maior primo, que tem 6.400 dígitos, é composto de 6.399 dígitos 9 e somente 1 dígito 8.
- O número resultante de 317 repetições do dígito 1 é um primo.
- O 713º. maior primo pode ser escrito como $(10^{1951}) \times (10^{1975} + 1991991991991991991991) + 1$, e foi descoberto em, você adivinhou, 1991.

Da perspectiva deste livro, a conexão entre primos e números de Fibonacci tem interesse em especial. Com exceção do número 3, todos os números de

Fibonacci que são primos também têm um índice (sua ordem na seqüência) primo. Por exemplo, o número de Fibonacci 233 é um primo e é o 13º (também um primo) número na seqüência. O inverso, contudo, não é verdade: o fato de que o índice é primo não significa necessariamente que o número também seja primo. Por exemplo, o décimo nono número (19 é primo) é 4.181, mas 4.181 não é primo — é igual a 113 × 37.

O quantidade de números de Fibonacci primos conhecidos tem crescido constantemente ao longo dos anos. Em 1979, o maior número de Fibonacci primo conhecido era o 531º da seqüência. Em meados da década de 1990, o maior conhecido era o 2.971º; em 2001, mostrou-se que o 81.839º número era um primo com 17.103 dígitos. Assim, será que há uma quantidade infinita de números de Fibonacci primos (como existem infinitos números primos, de modo geral)? Ninguém sabe de fato, e este é provavelmente o maior mistério matemático não-solucionado a respeito dos números de Fibonacci.

O EXORBITANTE PODER DA MATEMÁTICA

A coletânea de diálogos *Intentions* contém a filosofia estética do famoso dramaturgo e poeta Oscar Wilde (1854-1900). Nessa coletânea, o diálogo "The Decay of Lying" é uma apresentação particularmente provocativa das idéias de Wilde sobre "a nova Estética". Na conclusão desse diálogo, uma das personagens (Vivian) resume:

> "A Vida imita a Arte mais do que a Arte imita a Vida. Isso não decorre apenas do instinto mimético da Vida, mas do fato de que o objetivo autoconsciente da Vida é encontrar expressão, e de que a Arte propõe algumas belas formas através das quais ela pode perceber essa energia. É uma teoria que nunca foi proposta antes, mas que é extremamente proveitosa e lança uma luz inteiramente nova sobre a história da Arte.
>
> Segue-se, como um corolário disso, que a Natureza exterior também imita a Arte. Os únicos efeitos que ela nos pode mostrar são os efeitos que

> nós já vimos por meio da poesia ou em pinturas. Este é o segredo do encanto da Natureza, bem como a explicação de sua fraqueza.

Nós quase poderíamos substituir "matemática" por "Arte" neste trecho e obter uma declaração que reflete a realidade com que muitas mentes ilustres têm lutado. A matemática parece, à primeira vista, ser apenas bastante eficaz. Nas palavras do próprio Einstein: "Como é possível que a matemática, um produto do pensamento humano que é independente da experiência, ajuste-se tão perfeitamente a objetos da realidade física?" Outro físico notável, Eugene Wigner (1902-1995), conhecido por suas muitas contribuições à física nuclear, proferiu em 1960 uma famosa palestra intitulada "A Excessiva Eficácia da Matemática nas Ciências Físicas." Devemos nos perguntar, por exemplo, como é possível que os planetas, em sua órbita ao redor do Sol, sigam, como se descobriu, uma curva (uma elipse) que fora explorada pelos geômetras gregos muito antes que as leis de Kepler fossem descobertas? Por que a explicação para a existência de quase-cristais se baseia na Razão Áurea, um conceito elaborado por Euclides com propósitos puramente matemáticos? Não é estarrecedor que a estrutura de tantas galáxias contendo bilhões de estrelas siga exatamente a curva favorita de Bernoulli — a magnífica espiral logarítmica? E o que é mais assombroso: antes de tudo, por que as leis da física podem ser expressas em equações matemáticas?

Mas isso não é tudo. O matemático John Forbes Nash (agora mundialmente conhecido como o tema do livro e do filme biográfico *Uma mente brilhante*), por exemplo, ganhou o Prêmio Nobel de Economia de 1994, porque sua tese matemática (escrita aos vinte e um anos!) delineando seu "Equilíbrio de Nash" para jogos estratégicos não-cooperativos inaugurou uma revolução em campos tão diversos como a economia, a biologia evolutiva e as ciências políticas. O que faz a matemática funcionar tão bem?

O reconhecimento da extraordinária "efetividade" da matemática até conseguiu aparecer em um trecho incrivelmente engraçado do romance *Molloy*, de Samuel Beckett, sobre o qual tenho uma história pessoal. Em 1980, dois colegas da Universidade da Flórida e eu escrevemos um artigo

sobre estrelas de nêutrons, que são objetos astronômicos extremamente compactos e densos que resultam do colapso gravitacional do núcleo de estrelas grandes e maciças. O artigo era mais matemático que a maioria dos trabalhos na selva dos artigos sobre astronomia, e, conseqüentemente, decidimos acrescentar um mote na primeira página. O mote era:

É extraordinário como a matemática ajuda você...

— SAMUEL BECKETT, *Molloy*

A frase foi citada como extraída do primeiro dos romances da trilogia *Molloy*, *Malone morre* e *Inominável*, do famoso escritor e dramaturgo Samuel Beckett (1906-1989). Todos os três romances, aliás, representam uma busca do eu — uma caça à identidade efetuada por escritores por meio da escrita. Somos levados a observar os personagens em estado de decadência, enquanto eles buscam um significado para suas existências.

Artigos sobre astrofísica raramente têm motes. Conseqüentemente, recebemos uma carta do editor do *The Astrophysical Journal* informando que, embora também apreciasse Beckett, ele não via necessidade de incluir o mote. Respondemos que deixaríamos a cargo dele a decisão de publicar ou não o mote, e o artigo acabou sendo publicado com o mote na edição de 15 de dezembro. Mas aqui está o trecho completo de *Molloy*:

> E no inverno, sob meu pesado sobretudo, eu me envolvi em jornais como um embrulho e não os deixei até que a Terra acordou para melhor, em abril. O *Times Literary Supplement* estava admiravelmente adaptado a esse propósito, com permanente firmeza e impermeabilidade. Nem mesmo os peidos causavam marcas sobre ele. Eu não consigo evitar, gases escapam do meu traseiro pelo menor motivo; é difícil não mencionar isto de vez em quando, apesar da minha grande repugnância. Certo dia, eu os contei. Trezentos e quinze peidos em dezenove horas, ou cerca de dezesseis peidos por hora. Seja como for, não é excessivo. Quatro peidos a cada quinze minutos. Não é nada.

Nem mesmo um peido a cada quatro minutos. É inacreditável. Maldito seja, eu realmente peido pouco, nunca deveria ter mencionado isto. É extraordinário como a matemática ajuda você a se conhecer.

A história da matemática produziu, no mínimo, duas tentativas, filosoficamente muito diferentes, de responder à pergunta sobre o incrível poder da matemática. As respostas estão relacionadas à questão fundamental da verdadeira *natureza* da matemática. Uma discussão ampla desses temas pode preencher livros inteiros e certamente está além do âmbito deste livro. Farei, portanto, apenas uma curta descrição de algumas das principais linhas de pensamento e apresentarei minha opinião pessoal.

Uma concepção sobre a natureza da matemática, tradicionalmente chamada de "visão platônica", é que a matemática é univervsal e eterna, e sua existência é um fato objetivo, independente de nós, humanos. De acordo com a visão platônica, a matemática sempre esteve lá fora, em algum mundo abstrato, para que os homens simplesmente a descobrissem, da mesma maneira que Michelangelo acreditava que suas esculturas existiam dentro do mármore e que ele simplesmente as revelava. A Razão Áurea, os números de Fibonacci, a geometria euclidiana e as equações de Einstein, tudo faz parte desta realidade platônica que transcende a mente humana. Defensores dessa visão platônica consideram o famoso lógico austríaco Kurt Gödel (1906-1978) também como um dedicado platônico. Eles salientam que ele não só disse, sobre os conceitos matemáticos, que "eles também podem representar um aspecto da realidade objetiva", mas que seus "teoremas de incompletude", por si mesmos, poderiam ser considerados argumentos a favor da visão platônica. Esses teoremas, provavelmente os mais celebrados resultados em toda a lógica, mostram que, para qualquer sistema axiomático formal (por exemplo, teoria dos números), pode-se formular afirmações usando sua linguagem que "não podem ser provadas ou refutadas". Em outras palavras, a teoria dos números, por exemplo, é "incompleta" no sentido de que existem proposições *verdadeiras* da teoria dos números que os metódos de prova baseados nessa teoria são incapazes de demonstrar. Para prová-las, devemos pular para um sistema

superior e mais rico, em que novamente outras afirmações verdadeiras podem ser feitas, mas não podem ser provadas, e assim por diante, *ad infinitum*. O cientista da computação e escritor Douglas R. Hofstadter exprimiu isto de modo sucinto, no seu fantástico livro *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*: "a demonstrabilidade é uma noção mais fraca do que a verdade." Neste sentido, nunca existirá um método formal para se determinar se cada proposição matemática é absolutamente verdadeira, assim como não se pode determinar se uma teoria física é absolutamente verdadeira. O físico matemático Roger Penrose, de Oxford, está entre os que acreditam que os teoremas de Gödel demonstram de modo vigoroso a existência de um mundo matemático platônico. Em seu livro *Shadows of the Mind*, que instiga admiravelmente o pensamento, Penrose afirma: "A verdade matemática não é determinada arbitrariamente pelas regras de algum sistema formal 'feito pelo homem', mas tem uma natureza absoluta e se situa além de qualquer sistema de regras especificáveis." Em relação a isso, ele acrescenta que: "Apoio à visão platônica (...) era uma parte importante das motivações iniciais de Gödel." O matemático britânico G. H. Hardy, do século XX, também acreditava que a função do homem é "descobrir ou observar" a matemática, e não inventá-la. Em outras palavras, a paisagem abstrata da matemática estava lá, esperando que exploradores matemáticos a revelassem.

Uma das soluções propostas para o mistério da eficácia da matemática em explicar a natureza conta com uma intrigante modificação das idéias platônicas. Essa "visão platônica modificada" afirma que as leis físicas são expressas em equações matemáticas, a estrutura do universo é fractal, galáxias se organizam em espirais logarítmicas, e assim por diante, porque a matemática é a "linguagem do Universo". Especificamente, ainda se supõe que os objetos matemáticos tenham uma existência objetiva, completamente independente do conhecimento que temos deles, mas, em vez de se colocar a matemática em algum plano abstrato mítico, pelo menos algumas partes dela seriam colocadas no cosmo real. Se desejamos nos comunicar com civilizações inteligentes que estão a 10.000 anos-luz, só precisamos transmitir o número 1,6180339887... e ter certeza de que eles entenderão o que

queremos dizer, porque o Universo sem dúvida lhes impôs a mesma matemática. Deus é, de fato, um matemático.

Esta visão platônica modificada foi exatamente a crença manifestada por Kepler (matizada por suas inclinações religiosas), quando ele escreveu que a geometria "abasteceu Deus com padrões para a criação do mundo e os transmitiu ao homem juntamente com a imagem de Deus; e, na verdade, não foi percebida com os olhos." Galileu Galilei tinha idéias semelhantes:

> A Filosofia está escrita neste grande livro — refiro-me ao Universo — que se mantém continuamente aberto ao nosso escrutínio, mas que não pode ser compreendido, a menos que primeiro se aprenda a entender a linguagem e interpretar as letras com que foi escrito. Ele foi escrito na linguagem da matemática, e sua escrita são triângulos, círculos e outras figuras geométricas, sem as quais é humanamente impossível entender uma palavra sequer dele. Sem elas, fica-se vagando em um labirinto escuro.

O poeta místico e artista William Blake tinha uma opinião bem diferente desse Deus matemático. Blake desprezava totalmente as explicações científicas sobre a natureza. Para ele, Newton e os cientistas que o seguiam apenas tramaram para desemaranhar o arco-íris, para subjugar, por meio de regras, todos os mistérios da vida humana. Dessa maneira, na poderosa gravura de Blake "The Ancient of Days" (Figura 128; atualmente na Pierpont Morgan Library, em Nova York), ele retrata um Deus mau que maneja um compasso, não para estabelecer uma ordem universal, mas, para cortar as asas da imaginação.



Figura 128

Mas Kepler e Galileu não foram, de modo algum, os últimos matemáticos a adotar esta versão "modificada" da visão platônica, nem essas opiniões se limitaram àqueles que, como Newton, admitiram a existência de uma Mente Divina. O grande matemático francês, astrônomo e físico Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) escreveu em seu livro *Théorie Analitique des Probabilités* (Teoria Analítica das Probabilidades; 1812):

> Um intelecto que, em um determinado momento, conhecesse todas as forças que animam a natureza e as respectivas posições dos seres que a compõem, se, além disso, esse intelecto fosse suficientemente vasto para submeter esses dados à análise, ele seria capaz de condensar na mesma fórmula tanto os movimentos dos maiores corpos do universo como os dos menores átomos.

Trata-se do mesmo Laplace que respondeu a Napoleão Bonaparte: "Senhor, eu não necessito dessa hipótese", quando o imperador observou que não havia menção ao Criador no livro de Laplace sobre a mecânica celeste.

Recentemente, o matemático da IBM e escritor Clifford A. Pickover escreveu em seu divertido livro *The Loom of God*: "Não sei se Deus é um matemático, mas a matemática é o tear com que Deus urdiu o tecido do Universo... O fato de que a realidade possa ser descrita ou aproximada por *simples* expressões matemáticas me sugere que a natureza tem a matemática em sua essência."

Defensores da "visão platônica modificada" da matemática gostam de salientar que, ao longo dos séculos, os matemáticos produziram (ou "descobriram") numerosos objetos da matemática pura sem qualquer aplicação em mente. Décadas depois, descobriu-se que essas construções matemáticas e esse modelos forneciam a solução para problemas de física. A ladrilhagem de Penrose e as geometrias não-euclidianas são belos testemunhos desse processo em que a matemática inesperadamente penetra a física, mas há muitos outros exemplos.

Em muitos casos, o sentido do processo foi o inverso, com um fenômeno físico inspirando um modelo matemático que posteriormente se revelou a

explicação para um fenômeno físico completamente diferente. Um excelente exemplo é fornecido pelo fenômeno conhecido como movimento browniano. Em 1827, o botânico britânico Robert Brown (1773-1858) observou que, quando partículas de pólen ficavam suspensas na água, entravam em um estado de movimento agitado. Esse efeito foi explicado por Einstein em 1905 como resultado das colisões entre as partículas coloidais e as moléculas do fluido ao redor. Cada simples colisão tem um efeito desprezível, porque os grãos de pólen têm milhões de vezes mais massa que as moléculas de água, mas o bombardeio contínuo tinha um efeito cumulativo. Surpreendentemente, descobriu-se que o mesmo modelo se aplicava ao movimento de estrelas que formam aglomerados estelares. Neste caso, o movimento browniano se deve ao efeito cumulativo de vários astros passando perto de uma estrela, de forma que cada astro altera o movimento da estrela (por meio da interação gravitacional) com uma diferença muito pequena.

Existe, contudo, uma visão totalmente diferente (da visão platônica modificada) sobre a natureza da matemática e do motivo para sua eficácia. De acordo com esse ponto de vista (que está relacionado de modo complexo a dogmas classificados, na filosofia da matemática, de "formalismo" e "construtivismo"), a matemática não teria existência fora do cérebro humano. A matemática, tal como a conhecemos, não passaria de uma invenção humana, e uma civilização inteligente de algum outro lugar do Universo pode ter desenvolvido uma construção radicalmente diferente. Ou seja, os objetos matemáticos, acreditam os defensores dessa opinião, não teriam uma realidade objetiva — eles seriam imaginários. Nas palavras do grande filósofo alemão Immanuel Kant: "A verdade definitiva da matemática está na possibilidade de que seus conceitos possam ser construídos pela mente humana." Em outras palavras, Kant enfatiza o aspecto da *liberdade* na matemática, a liberdade de postular e de inventar padrões e estruturas.

Esta visão da matemática como uma invenção humana tornou-se popular principalmente entre os psicólogos atuais. Por exemplo, o pesquisador e escritor francês Stanislas Dehaene conclui em seu interessante livro *The Number Sense*, de 1997, que "o intuicionismo [que, para ele, é sinôni-

mo de matemática como invenção humana] me dá a impressão de fornecer o melhor relato das relações entre a aritmética e o cérebro humano." Do mesmo modo, a última frase do livro *Where Mathematics Comes From* (2000), do lingüista George Lakoff, da University of California, e do psicólogo Rafael E. Núñez afirma: "O retrato da matemática tem uma feição humana." Essas conclusões baseiam-se principalmente nos resultados de experiências psicológicas e em estudos neurológicos da funcionalidade do cérebro. Experiências mostram que bebês têm um mecanismo inato para reconhecer números em pequenos conjuntos e que crianças adquirem habilidades aritméticas elementares de forma espontânea, mesmo sem muita instrução formal. Além disso, o córtex parietal inferior foi identificado como a área do cérebro que abriga o circuito neural envolvido nas aptidões numéricas simbólicas. Esta área, presente nos dois hemisférios cerebrais, localiza-se anatomicamente na junção das conexões neurais do tato, da visão e da audição. Em pacientes que sofrem de uma rara forma de ataque enquanto realizam manipulações aritméticas (conhecido como *epilepsia arithmetices*), as medidas das ondas cerebrais (eletroencefalogramas) mostram anormalidades no córtex parietal inferior. Da mesma forma, lesões nesta região afetam a habilidade matemática, a escrita e a coordenação espacial.

Mesmo se baseada na fisiologia ou psicologia, a visão da matemática como uma invenção humana sem realidade intrínseca ainda precisa responder a duas perguntas: "Por que a matemática é tão poderosa na explicação do Universo, e por que até mesmo alguns dos mais puros produtos da matemática se ajustam como uma luva a fenômenos físicos?"

A resposta a essas duas perguntas por parte dos que defendem a idéia do "homem-inventor" também se baseia em um modelo biológico: evolução e seleção natural. A idéia aqui é que o progresso na compreensão do Universo e a formulação de leis matemáticas que descrevem os fenômenos dentro dele foram alcançadas por meio de um prolongado e tortuoso processo evolutivo. Nosso modelo atual do Universo é o resultado de uma longa evolução que envolveu muitos avanços falsos e muitos becos sem saída. A seleção natural eliminou os modelos matemáticos que não se ajustaram às observações e às

experiências, deixando somente os que tiveram êxito. Segundo esta visão, todas as "teorias" do Universo na verdade não passam de "modelos" cujos atributos são determinados exclusivamente por seu sucesso em se ajustarem aos dados oriundos da observação e da experimentação. O modelo maluco de Kepler para o sistema solar no *Mysterium Cosmographicum* era aceitável, contanto que pudesse explicar e prever o comportamento dos planetas.

O sucesso da matemática pura que se transformou em matemática aplicada neste quadro apenas reflete uma superprodução de conceitos, dos quais a física selecionou os mais adequados a suas necessidades — uma verdadeira sobrevivência do mais ajustado. Afinal de contas, salientariam os "invencionistas", Godfrey H. Hardy sempre se orgulhou de "nunca ter feito algo 'útil'". Esta opinião sobre a matemática aparentemente é compartilhada também por Marilyn vos Savant, a "recordista mundial" de QI — um incrível 228. Afirma-se que ela teria dito: "Estou começando a pensar simplesmente que a matemática pode ser inventada para descrever qualquer coisa, e matéria não é exceção."

Em minha humilde opinião, nem a visão platônica modificada nem a visão da seleção natural fornecem uma resposta plenamente satisfatória (pelo menos da maneira como as duas são tradicionalmente formuladas) ao mistério da eficácia da matemática.

Sustentar que a matemática é puramente uma invenção humana e consegue explicar a natureza somente devido à evolução e à seleção natural é ignorar alguns fatos importantes da natureza da matemática e da história dos modelos teóricos do Universo. Primeiro, embora as regras matemáticas (por exemplo, os axiomas da geometria ou da teoria dos conjuntos) sejam, de fato, criações da mente humana, uma vez que essas regras são especificadas, nós perdemos nossa liberdade. A definição da Razão Áurea surgiu inicialmente dos axiomas da geometria euclidiana; a definição da seqüência de Fibonacci, dos axiomas da teoria dos números. Já o fato de que a razão de sucessivos números de Fibonacci convergem para a Razão Áurea nos foi imposta — os homens não tiveram escolha nesse ponto. Portanto, os objetos matemáticos, embora imaginários, têm, sim, propriedades *reais*. Segun-

do, a explicação sobre o excessivo poder da matemática não pode estar baseada somente na evolução em seu sentido estrito. Por exemplo, quando Newton propôs sua teoria da gravidade, os dados que ele tentava explicar eram precisos, na melhor das hipóteses, até três casas decimais. Contudo, seu modelo matemático para a força entre duas massas no Universo obteve uma incrível precisão, superior a uma parte em um milhão. Ou seja, esse modelo específico não foi *imposto* a Newton por mensurações existentes do movimento dos planetas, nem Newton fez um fenômeno natural se encaixar à força num padrão matemático preexistente. Além disso, a seleção natural, na interpretação comum desse conceito, tampouco se aplica, porque não se tratava do caso de cinco teorias rivais que foram propostas, das quais uma acabou ganhando. O que conteceu foi que a teoria de Newton era a única "no pedaço".

A visão platônica modificada, por outro lado, enfrenta vários tipos de desafios.

Primeiro, há a importante questão conceitual de que a visão platônica modificada realmente não oferece qualquer *explicação* para o poder da matemática. A questão simplesmente é transformada em uma crença no papel da Matemática como sustentação do mundo físico. Simplesmente se *supõe* que a Matemática seja o correspondente simbólico do Universo. Roger Penrose, que, como mencionei antes, é um firme defensor do mundo platônico de formas matemáticas, concorda que o "intrigante papel subjacente exato que o mundo matemático platônico desempenha no mundo físico" continua um mistério. O físico David Deutsch da Universidade de Oxford, inverte um pouco a questão. Em seu perspicaz livro *The Fabric of Kelity*, de 1997, ele se pergunta: "em uma realidade formada pela física e entendida através de métodos da ciência, de onde vem a certeza matemática?" Penrose acrescenta à eficácia da matemática mais dois mistérios. Em seu livro *Shadows of the Mind* ele se pergunta "como é que seres capazes de perceber surgem fora do mundo físico," e "como essa mentalidade aparentemente é capaz de 'criar' conceitos matemáticos fora de algum tipo de modelo mental." Essas perguntas intrigantes, que estão totalmente fora do âmbito deste livro, tra-

tam da origem da consciência e da capacidade espantosa de nossas primitivas ferramentas mentais de penetrar no mundo platônico (que, para Penrose, é uma realidade objetiva).

O segundo problema com que se depara a visão platônica modificada se refere à questão da *universalidade*. Até que ponto temos certeza de que as leis que o universo deve obedecer podem ser representadas pelo tipo de equações matemáticas que formulamos? Até recentemente, a maioria dos físicos da face da Terra provavelmente teria afirmado que a história tem mostrado que as equações são a *única* maneira pela qual as leis físicas podem ser expressas. Mas esta situação pode mudar com a iminente publicação do livro *A New Kind of Science*, de Stephen Wolfram. Wolfram — um dos pensadores mais inovadores da computação científica e da teoria dos sistemas complexos — é mais conhecido pelo desenvolvimento do Mathematica, um programa/sistema de computador que permite uma série de cálculos antes inacessíveis. Após dez anos de um silêncio virtual, Wolfram está prestes a surgir com um livro provocante em que faz a audaciosa afirmação de que ele pode substituir a infra-estrutura básica da ciência. Em um mundo acostumado a mais de trezentos anos de uma ciência dominada por equações matemáticas como os blocos de construção dos modelos da natureza, Wolfram propõe sua substituição por simples programas de computador. Ele sugere que o maior segredo da natureza é o uso de simples programas para gerar complexidade.

O livro de Wolfram ainda não havia sido lançado na época em que escrevi este, mas a partir de uma longa conversa que tivemos e de uma entrevista que ele concedeu ao escritor de ciência Marcus Chown, posso concluir com segurança que seu trabalho tem muitas implicações de grande alcance. Do ponto de vista estrito de suas reflexões sobre o platonismo, contudo, a obra de Wolfram salienta, no mínimo, que o mundo matemático particular que muitos pensam existir lá fora e que, acreditava-se, está subjacente à realidade física, pode não ser único. Em outras palavras, podem realmente existir descrições da natureza que sejam bem diferentes da que temos. A matemática, tal como a conhecemos, captaria apenas uma parte minúscula

do vasto espaço de todos os simples e possíveis conjuntos de regras que poderiam descrever o funcionamento do Cosmo.

Se tanto a visão platônica modificada como a interpretação da seleção natural têm dificuldades para explicar a impressionante eficácia da matemática, será que há uma explicação que funcione?

Acredito que a explicação tem de se basear em conceitos emprestados dos dois pontos de vista, em vez de adotar um ou outro. A situação aqui é bem parecida com as tentativas históricas da física de explicar a natureza da luz. A lição desse pedaço da história da ciência é tão profunda que a descreverei agora de forma sucinta.

O primeiro artigo de Newton era sobre óptica, e ele continuou a trabalhar nesse tema, durante a maior parte de sua vida. Em 1704, ele publicou a primeira edição de seu livro *Opticks*, que posteriormente ele revisou três vezes. Newton sugeriu uma "teoria de partícula para a luz", em que se supunha que a luz era constituída de partículas ínfimas e duras, que obedeceriam às mesmas leis do movimento, como o faziam bolas de bilhar. Nas palavras de Newton: "Até mesmo os raios de luz parecem ser corpos duros." Duas experiências famosas no início do século XX descobriram o efeito fotoelétrico e o efeito Compton, e proporcionaram forte apoio à idéia de partículas de luz. O efeito fotoelétrico é um processo em que elétrons de uma peça de metal absorvem energia suficiente da luz para permitir que escapem. A explicação de Einstein para esse efeito em 1905 (que lhe valeu o Prêmio Nobel de Física de 1922) mostrava que a luz cede energia aos elétrons de uma maneira granular, em indivisíveis unidades de energia. Dessa maneira, o *fóton* — partícula de luz — foi apresentado. O físico Arthur Holly Compton (1892-1962) analisou, entre 1918 e1925, a dispersão de raios X de elétrons tanto de maneira teórica como experimental. Seu trabalho (que lhe valeu o Prêmio Nobel de Física de 1927) posteriormente confirmou a existência do *fóton*.

Mas havia outra teoria da luz — a teoria ondulatória — em que se supunha que a luz se comportava como ondas de água em um tanque. Esta teoria foi defendida principalmente pelo físico holandês Christiann Huygens

(1629-1695). A teoria ondulatória não teve muita repercussão até que o físico e médico Thomas Young (1773-1829) descobriu a *interferência* em 1801. O fenômeno em si é bastante simples. Suponha que você mergulhe os dedos indicadores de ambas as mãos periodicamente na água de um tanque. Cada dedo criará uma seqüência de ondas concêntricas; a crista e o cavado se seguirão na forma de anéis que se expandem. Nos pontos em que uma crista organizada de um dedo intercepta uma crista de outro, o resultado é que as duas ondas se reforçam ("interferência construtiva"). Nos pontos em que uma crista se sobrepõe ao cavado, eles se anulam ("interferência destrutiva"). Uma análise detalhada do padrão fixo que surge daí mostra que, ao longo da linha central (entre os dois dedos), há uma interferência construtiva. De qualquer um dos dois lados, linhas de interferência destrutiva se alternam com linhas de interferência construtiva.

No caso da luz, a interferência destrutiva simplesmente significa linhas escuras. Young, uma criança-prodígio que falava onze línguas aos dezesseis anos, realizou um experimento em que ele deixou a luz passar através de duas fendas e demonstrou que a luz na superfície visível era "dividida por listras escuras".

O resultado de Young — que foi seguido pelo impressionante trabalho teórico do engenheiro francês Augustin Fresnel entre 1815 e 1820, iniciou uma conversão dos físicos à teoria ondulatória. Experimentos posteriores realizados pelo físico francês Léon Foucault em 1850 e pelo físico americano Albert Michelson em 1883 mostraram de modo inequívoco que a refração da luz, à medida que ela passa do ar para a água, também se comportava exatamente como foi previsto na teoria ondulatória. Mais importante ainda: o físico escocês James Clerk Maxwell (1831-1879) publicou em 1864 uma teoria abrangente do eletromagnetismo que previa a existência de ondas eletromagnéticas que se propagavam em um movimento com a velocidade da luz. Ele foi além ao propor que a própria luz era uma onda eletromagnética. Finalmente, entre 1886 e 1888, o físico alemão Heinrich Herz provou experimentalmente que a luz era, de fato, a onda eletromagnética prevista por Maxwell.

Então, o que é a luz? Será um simples bombardeio de partículas (fótons) ou apenas uma onda? Na verdade, nem uma coisa nem outra. A luz é um fenômeno físico mais complicado que qualquer um desses conceitos — que se baseiam em modelos da física clássica — isoladamente pode descrever. Para descrever a propagação da luz e para entender um fenômeno como a interferência, podemos e temos de usar a teoria da onda eletromagnética. No entanto, quando queremos analisar a interação da luz com partículas elementares, temos de usar a descrição do fóton. Este quadro, em que as descrições de partícula ou de onda se complementam, tornou-se conhecido como a dualidade onda-partícula. A moderna teoria quântica da luz unificou as noções clássicas de ondas e partículas no conceito de probabilidades. O campo eletromagnético é representado por uma função onda, que dá a probabilidade de o campo assumir determinadas formas. O fóton é a energia associada a esses modelos.

Voltando agora à questão da natureza da matemática e do motivo de sua eficácia, acredito que o mesmo aspecto complementar deveria ser usado. A matemática foi inventada, no sentido de que as "regras do jogo" (os conjuntos de axiomas) são criadas pelo homem. Mas, depois de inventada, ela adquiriu vida própria, e os homens tiveram (e ainda têm) de descobrir todas as suas propriedades, no espírito da visão platônica. A lista interminável das vezes em que a Razão Áurea surge inesperadamente, as incontáveis relações matemáticas obedecidas pelos números de Fibonacci e o fato de que ainda não sabemos se existem infinitos números primos de Fibonacci fornecem ampla evidência para essa questão de busca.

Wolfram sustenta opiniões muito semelhantes. Perguntei-lhe especificamente se ele achava que a matemática foi "inventada" ou "descoberta". Ele respondeu: "Se não houvesse muita escolha na seleção desse conjunto particular de regras, então faria sentido dizer que ela foi descoberta, mas já que existe muita escolha e nossa matemática se baseia simplesmente na História, eu devo dizer que ela foi inventada." A frase "se baseia simplesmente na História" neste contexto é crucial, pois implica que o sistema de axiomas em que nossa matemática se baseia é aquele que surgiu em decor-

rência da aritmética e da geometria dos antigos babilônios. Isto levanta imediatamente duas questões: (1) Por que os babilônios desenvolveram essas disciplinas específicas e não outros conjuntos de regras? E reformulando a pergunta sobre a eficácia da matemática: (2) Por que essas disciplinas e suas descendentes se mostraram tão úteis para a física?

Curiosamente, as respostas a essas duas perguntas podem estar relacionadas. A própria matemática pode ter se originado de uma percepção humana subjetiva sobre como a natureza funciona. A geometria pode refletir simplesmente a habilidade humana de reconhecer com facilidade linhas, quinas e curvas. A aritmética pode representar a aptidão humana para analisar objetos distintos. Neste quadro, a Matemática que temos é uma característica dos *detalhes biológicos dos humanos e de como eles percebem o cosmo.* A matemática é, assim, em algum sentido, a linguagem do Universo — do universo percebido pelos homens. Outras civilizações inteligentes lá fora podem ter desenvolvido conjuntos de regras totalmente diferentes, se seus mecanismos de percepção forem muito diferentes dos nossos. Por exemplo, quando uma gota d'água é acrescentada a outra ou uma nuvem molecular na galáxia se junta a outra, elas formam apenas uma gota ou uma nuvem, não duas. Portanto, se uma civilização que for de algum modo baseada em fluidos existir, para ela um mais um não será necessariamente igual a dois. Uma civilização desse tipo pode não reconhecer nem os números primos nem a Razão Áurea. Para dar outro exemplo, praticamente não há dúvida de que, se a gravidade da Terra fosse apenas um pouco mais forte do que é de fato, os babilônios e Euclides poderiam ter proposto uma geometria diferente da euclidiana. A Teoria da Relatividade Geral de Einstein nos ensinou que, em um campo gravitacional muito mais forte, o espaço ao nosso redor seria curvo, não plano — raios de luz viajariam por trajetórias curvas, e não em linhas retas. A geometria euclidiana surgiu de suas observações simples na fraca gravidade da Terra. (Outras geometrias, em superfícies curvas, foram formuladas no século XIX.)

Evolução e seleção natural definitivamente desempenharam um papel-chave em nossas teorias sobre o Universo. É por isso que não continuamos

a seguir a física de Aristóteles. Mas isto não quer dizer que a evolução sempre tenha sido contínua e suave. A evolução biológica da vida na Terra também não foi. O caminho da vida foi ocasionalmente moldado por acontecimentos regidos pelo acaso, como as extinções em massa. Impactos de corpos astronômicos (cometas ou asteróides) de vários quilômetros de diâmetro fizeram com que os dinossauros sucumbissem e prepararam o caminho para o domínio dos mamíferos. A evolução das teorias sobre o Universo também foi esporadicamente pontuada por saltos quânticos em seu entendimento. A teoria newtoniana da gravidade e a Relatividade Geral de Einstein ("Ainda não consigo entender como ele pensou nela", disse o falecido físico Richard Feynman) são dois exemplos perfeitos desses avanços espetaculares. Como podemos explicar essas realizações milagrosas? A verdade é que não podemos. Isto é, não mais do que podemos explicar como, no mundo do xadrez, que estava acostumado a vitórias por margens de mais ou menos meio ponto, em 1971 Bobby Fischer repentinamente arrasou os dois Grandes Mestres Mark Taimanov e Ben Larsen por um placar de seis a zero em seu caminho para o campeonato mundial. Podemos considerar igualmente difícil entender como os naturalistas Charles Darwin (1809-1882) e Alfred Russel Wallace (1823-1913) tiveram, separadamente, a inspiração de apresentar o conceito de evolução — a idéia de que todas as vidas tiveram origem em um ancestral comum. Devemos simplesmente reconhecer o fato de que certos indivíduos estão um passo à frente dos outros em termos de perspicácia. Contudo, será que avanços dramáticos como os de Newton e Einstein podem ser acomodados de algum modo em um cenário de evolução e seleção natural? Eles podem, mas com uma interpretação um pouco menos comum da seleção natural. Embora seja verdade que a teoria da gravitação universal de Newton não tenha encontrado teorias rivais em sua época, ela não teria sobrevivido até hoje se não tivesse sido a mais "ajustada". Kepler, ao contrário, propôs um modelo para a interação entre planetas e o Sol que teve vida muito curta. Segundo o modelo, o Sol giraria sobre seu eixo lançando raios de energia magnética. Esses raios, ele supôs, agarrariam os planetas, impulsionado-os em um círculo.

Quando essas definições generalizadas sobre evolução (contando com saltos quânticos) e seleção natural (que age em longos períodos) são adotadas, acredito que a "excessiva" eficácia da matemática encontra uma explicação. Nossa matemática é a contrapartida simbólica do Universo que nós percebemos, e seu poder tem sido ampliado continuamente pela exploração humana.

Jef Raskin, o criador do computador Macintosh da Apple, enfatiza um aspecto diferente — a evolução da lógica humana. Em um ensaio de 1998 sobre a eficácia da matemática, ele conclui que "A *lógica* humana [ênfase minha] nos foi imposta pelo mundo físico e, portanto, é coerente com ele. A matemática deriva da lógica. É por isso que a matemática é coerente com o mundo físico."

Na peça "Tumberlaine the Great", uma história sobre um herói-vilão maquiavélico que é ao mesmo tempo sensível e um assassino perverso, o grande dramaturgo inglês Christopher Marlowe (1564-1593) reconhece essa aspiração humana de entender o cosmo:

A Natureza que nos fez de quatro elementos
Lutando dentro de nosso peito pelo domínio
Ensinando-nos tudo para que tenhamos uma mente desejosa:
Nossas almas, cujas faculdades podem abranger
A maravilhosa arquitetura do mundo:
E mede todos os caminhos tortuosos dos planetas
Ainda galga após o conhecimento do infinito,
E sempre se movendo como as esferas inquietas...

A Razão Áurea é um produto da geometria inventada pelo homem. No entanto, os humanos não sabiam para que reino encantado esse produto os estava conduzindo. Se a geometria não tivesse sido inventada, então nós talvez nunca tivéssemos conhecido a Razão Áurea. Mas então, quem sabe? Ela poderia ter surgido como o produto de um pequeno programa de computador.

APÊNDICE 1

Queremos mostrar que, para qualquer número inteiro p e q, em que p seja maior que q, os três números: $p^2 - q^2$, $2pq$ e $p^2 + q^2$ formam uma tripla pitagórica. Em outras palavras, precisamos mostar que a soma dos quadrados dos dois primeiros é igual ao quadrado do terceiro. Para tanto, usamos as identidades gerais que valem para quaisquer a e b:

$$(a + b)^2 = (a + b)\,(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = (a - b)\,(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

A partir dessas identidades, o quadrado do primeiro número é:

$$(p^2 - q^2)^2 = p^4 - 2p^2q^2 + q^4$$

e a soma dos quadrados dos dois primeiros é:

$$p^4 - 2p^2q^2 + q^4 + 4p^2q^2 = p^4 + 2p^2q^2 + q^4.$$

E o quadrado do último número é:

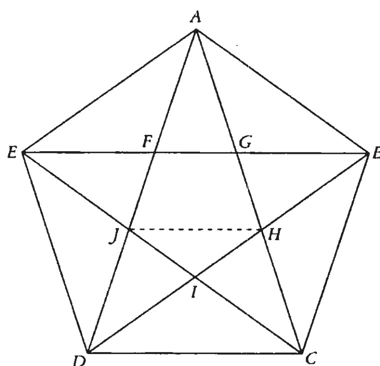
$$(p^2 + q^2)^2 = p^4 + 2p^2q^2 + q^4.$$

Vemos, portanto, que o quadrado do terceiro número é, de fato, igual à soma dos quadrados dos dois primeiros, independentemente dos valores de p e q.

APÊNDICE 2

Queremos provar que a diagonal e o lado do pentágono são incomensuráveis — eles não têm qualquer medida comum.

A prova utiliza o método geral *reductio ad absurdum*, descrito no fim do Capítulo 2.



Denotemos o lado do pentágono *ABCDE* por s_1 e a diagonal por d_1. Pelas propriedades dos triângulos isósceles, pode-se provar facilmente que $AB = AH$ e $HC = HJ$. Denotemos agora o lado do pentágono menor *FGHIJ* por s_2 e sua diagonal por d_2. Evidentemente

$$AC = AH + HC = AB + HJ.$$

Portanto:

$$d_1 = s_1 + d_2 \text{ ou } d_1 - s_1 = d_2.$$

Se d_1 e s_1 têm uma medida comum, isto significa que tanto d_1 como s_1 são algum inteiro múltiplo dessa medida comum. Conseqüentemente, essa também é uma medida comum de $d_1 - s_1$ e, portanto, d_2. Da mesma forma, as igualdades

$$AG = HC = HJ$$
$$AH = AB$$

e

$$AH = AG + GH$$
$$AB = HJ + GH$$

nos dão

$$s_1 = d_2 + s_2$$

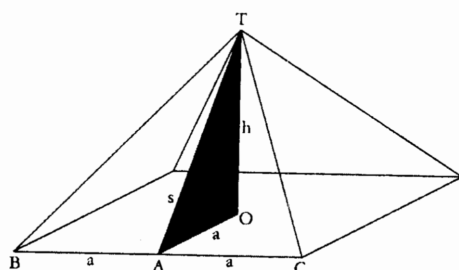
ou

$$s_1 - d_2 = s_2.$$

Mas, baseados em nosso pressuposto de que a medida comum de s_1 e d_1 é também uma medida comum de d_2, a última igualdade mostra que ela também é uma medida comum de s_2. Encontramos, portanto, que a mesma unidade que mede s_1 e d_1 também mede s_2 e d_2. Este processo pode ser continuado *ad infinitum*, para pentágonos cada vez menores. A partir disso, concluímos que a mesma unidade que era uma medida comum para o lado e a diagonal do *primeiro* pentágono é uma medida comum de todos os outros pentágonos, por menores que eles se tornem. Como isto obviamente não pode ser verdade, implica que nosso pressuposto inicial de que o lado e a diagonal têm uma medida comum é falso — o que completa a prova de que s_1 e d_1 são incomensuráveis.

APÊNDICE 3

A área de um triângulo é a metade do produto da base e da altura em relação à base. No triângulo TBC, a base BC é igual a *2a* e a altura TA é igual a *s*. Portanto, a área do triângulo é igual a $s \times a$. Queremos mostrar que se o quadrado da altura da *pirâmide*, h^2, é igual à área de sua face triangular ($s \times a$), então, s/a é igual à Razão Áurea.



Temos que

$$h^2 = s \times a$$

Usando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo *TOA*, temos

$$s^2 = h^2 + a^2.$$

Tendo antes substituído h^2 por:

$$s^2 = s \times a + a^2.$$

Dividindo os dois lados por a^2, tendo antes substituído h^2 por $s \times a$, obtemos:

$$(s/a)^2 = (s/a) + 1.$$

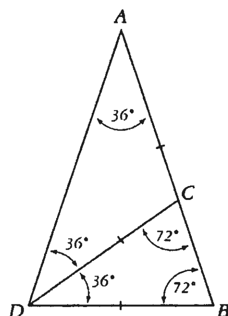
Em outras palavras, se denotamos s/a por x, temos a equação quadrática:

$$x^2 = x + 1.$$

No Capítulo 4, mostrei que esta é exatamente a equação que define a Razão Áurea.

APÊNDICE 4

Um dos teoremas de *Os Elementos* demonstra que quando dois triângulos têm os mesmos ângulos, eles são similares. Isto é, os dois triângulos têm exatamente a mesma forma, sendo todos os seus lados proporcionais entre si. Se um lado de um triângulo é duas vezes maior que o respectivo lado do outro triângulo, então os outros lados também o são. Os dois triângulos *ADB* e *DBC* são similares (porque eles têm os mesmos ângulos). Portanto, a razão *AB*/*DB* (a razão entre os lados dos dois triângulos *ADB* e *DBC*) é igual a *DB*/*BC* (a razão entre as bases dos mesmos dois triângulos):



$$AB/DB = DB/BC.$$

Mas os dois triângulos são também isósceles, de modo que

$$DB = DC = AC.$$

Portanto, encontramos, a partir das duas igualdades acima, que

$$AC/BC = AB/AC,$$

o que significa (segundo a definição euclidiana) que o ponto *C* divide a linha *AB* em uma Razão Áurea. Como $AD = AB$ e $DB = AC$, temos ainda que $AD/DB = \Phi$.

APÊNDICE 5

Equações quadráticas são equações da forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

onde a, b, c são números arbitrários. Por exemplo, na equação $2x^2 + 3x + 1 = 0$, $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$.

A fórmula geral para as duas soluções da equação é

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

No exemplo acima

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{9-8}}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{9-8}}{4} = \frac{-4}{4} = -1.$$

Na equação que obtivemos para a Razão Áurea

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

temos que $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$. As duas soluções, portanto, são:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{1+4}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{1+4}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

APÊNDICE 6

O problema da herança pode ser resolvido da seguinte forma. Denotemos toda a herança como E e a parte (em *bezants*) de cada filho como x. (Eles repartem toda a herança igualmente.)

O primeiro filho recebeu:

$$x = 1 + \frac{1}{7}(E - 1).$$

O segundo filho recebeu:

$$x = 2 + \frac{1}{7}(E - 2 - x).$$

Igualando as duas partes:

$$1 + \frac{1}{7}(E - 1) = 2 + \frac{1}{7}(E - 2 - x)$$

$$1 + \frac{E}{7} - \frac{1}{7} = 2 + \frac{E}{7} - \frac{2}{7} - \frac{x}{7}$$

e rearrumando:

$$\frac{x}{7}=\frac{6}{7}$$

$$x=6.$$

Portanto, cada filho recebeu 6 *bezants*.
Substituindo na primeira equação, temos:

$$6=1+\frac{1}{7}(E-1)$$

$$6=1+\frac{E}{7}-\frac{1}{7}$$

$$\frac{E}{7}=\frac{36}{7}$$
$$E=36.$$

A herança total era de 36 *bezants*. O número de filhos era, portanto, 36/6 = 6.
A solução de Fibonacci diz que:

A herança total tem de ser um número que, quando 1 vezes 6 é somado a ela, o valor seja divisível por 1 mais 6, ou 7; quando 2 vezes 6 é somado a ela, o valor é divisível por 2 mais 6, ou 8; quando 3 vezes 6 é somado a ela, o valor é divisível por 3 mais 6, ou 9, e assim por diante. O número é 36. $^1/_7$ de 36 menos $^1/_7$ é $^{35}/_7$; mais 1 é $^{42}/_7$, ou 6, e esta é a quantidade que cada filho recebeu; a herança total dividida pela parte de cada filho é igual ao número de filhos, ou $^{36}/_6$, que é igual a 6.

APÊNDICE 7

A relação entre o número de subobjetos, n, o fator de redução de comprimento, f, e a dimensão, D, é

$$n = \left(\frac{1}{f}\right)^D.$$

Se um número positivo A é escrito como $A = 10^L$, então chamamos L de logaritmo (na base 10) de A e o escrevemos como log A. Em outras palavras, as duas equações $A = 10^L$ e $L = \log A$ são totalmente equivalentes entre si. As regras dos logaritmos são:

(i) O logaritmo de um *produto* é a *soma* dos logaritmos

$$\log (A \bullet B) = \log A + \log B.$$

(ii) O logaritmo do *quociente* é a *diferença* dos logaritmos

$$\log\left(\frac{A}{B}\right) = \log A - \log B.$$

(iii) O logaritmo da potência A^m é o expoente m multiplicado pelo logaritmo do número A.

$$\log A^m = m \bullet \log A.$$

Como $10^0 = 1$, temos, da definição de logaritmo, que log 1 = 0. Como $10^1 = 10$, $10^2 = 100$ e assim por diante, temos que log 10 = 1, log 100 = 2, e assim por diante. Conseqüentemente, o logaritmo de qualquer número entre 1 e 10 é um número entre 0 e 1; o logaritmo de qualquer número entre 10 e 100 é um número entre 1 e 2, e assim por diante.

Se tomarmos o logaritmo (na base 10) de ambos os lados da equação acima (a que descreve a relação entre *n*, *f* e *D*), obtemos

$$\log n = D \log (1/f) = -D \log f.$$

Portanto, dividindo ambos os lados por $-\log f$

$$D = \frac{\log n}{-\log f}.$$

No caso do floco de neve de Koch, por exemplo, cada curva contém quatro "subcurvas" que são um terço em tamanho; portanto $n = 4$, $f = {}^1/_3$, e obtemos

$$D = \frac{\log 4}{-\log(1/3)} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.2618595....$$

APÊNDICE 8

Se examinarmos a Figura 116(a), veremos que a condição para os dois ramos se tocarem requer simplesmente que a soma de todos os comprimentos *horizontais* dos ramos sempre decrescentes, começando em f^3, sejam iguais ao componente horizontal do grande ramo de comprimento f. Todos os componentes horizontais são dados pelo comprimento total multiplicado pelo cosseno de 30 graus. Obtemos, portanto:

$$f \cos 30° = f^3 \cos 30° + f^4 \cos 30° + f^5 \cos 30° + f^6 \cos 30° + \ldots$$

Dividindo por cos 30°, obtemos

$$f = f^3 + f^4 + f^5 + f^6 + \ldots$$

A soma à direita é a soma de uma série *geométrica* infinita (cada termo é igual ao termo anterior multiplicado por um fator constante) em que o primeiro termo é f^3, e a razão entre dois termos consecutivos é f. Em geral, a soma S de uma seqüência geométrica infinita em que o primeiro termo é a razão entre termos consecutivos q é igual a

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Por exemplo, a soma da seqüência

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$$

em que $a = 1$ e $q = ½$ é igual a

$$S=\frac{1}{1-1/2}=\frac{1}{1/2}=2.$$

No nosso caso, encontramos a partir da equação acima:

$$f=\frac{f^3}{1-f}.$$

Dividindo os dois lados por f, obtemos

$$1=\frac{f^2}{1-f}.$$

Multiplicando por $(1 - f)$ e rearranjando, obtemos a equação quadrática:

$$f^2 + f - 1 = 0,$$

com a solução positiva

$$\frac{\sqrt{5-1}}{2},$$

que é $1/\Phi$.

APÊNDICE 9

A Lei de Benford afirma que a probabilidade P de que o dígito D apareça no primeiro lugar é dada por (logaritmo na base 10)

$$P = \log (1 + 1/D).$$

Portanto, para $D = 1$

$$P = \log (1 + 1) = \log 2 = 0{,}30.$$

Para $D = 2$

$$P = \log (1 + ½) = \log 1{,}5 = 0{,}176,$$

E assim por diante. Para $D = 9$,

$$P = \log (1 + {}^{1}/_{9}) = \log ({}^{10}/_{9}) = 0{,}046.$$

A lei mais geral diz, por exemplo, que a probabilidade de que os três primeiros dígitos sejam 1, 5 e 8 é

$$P = \log (1 + {}^{1}/_{158}) = 0{,}0027.$$

APÊNDICE 10

A prova de Euclides de que existem infinitos números primos se baseia no método *reductio ad absurdum*. Ele começa supondo o contrário — que só existe um número finito de primos. Se isso é verdade, então um deles deve ser o maior de todos os primos. Denotemos esse primo por P. Euclides, então, construiu um novo número pelo seguinte processo: ele multiplicou todos os primos de 2 até P inclusive, e então ele somou 1 ao produto. O novo número é, portanto:

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \dots \times P + 1.$$

Pelo pressuposto inicial, este número deve ser composto (um número não-primo), porque ele é obviamente maior que P, o qual se supôs ser o maior dos primos. Conseqüentemente, este número deve ser divisível por, no mínimo, um dos primos existentes. Contudo, a partir de sua construção vemos que, se dividirmos esse número por qualquer um dos primos até P, isto deixará um resto igual a 1. Isto implica que, se o número é realmente composto, algum primo maior que P deve dividi-lo. Contudo, esta conclusão contradiz o pressuposto de que P é o maior dos primos, completando assim a prova de que há infinitos números primos.

LEITURAS ADICIONAIS

Somente pessoas superficiais não julgam pelas aparências.
O mistério deste mundo é o visível, não o invisível.

— Oscar Wilde (1854-1900)

A maioria dos livros e artigos selecionados aqui são de literatura não-técnica. Os poucos que são mais técnicos foram escolhidos com base em algumas características especiais. Também listei alguns *websites* que contêm material interessante.

1: PRELÚDIO PARA UM NÚMERO

Ackermann, F. "The Golden Section," *Mathematical Monthly*, 2 (1895): 260-264.

Dunlap, R. A. *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*. Cingapura: World Scientific, 1997.

Fowler, D. H. "A Generalization of the Golden Section," *The Fibonacci Quarterly*, 20 (1982): 146-158.

Gardner, M. *The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles & Diversions*. Chicago: University of Chicago Press, 1987.

Ghyka, M. *The Geometry of Art and Life*. Nova York: Dover Publications, 1977.

Grattan-Guinness, I. *The Norton History of the Mathematical Sciences.* Nova York: W. W. Norton & Company, 1997.

Herz-Fischler, R. *A Mathematical History of the Golden Number.* Mineola, NY: Dover Publications, 1998.

Hoffer, W. "A Magic Ratio Occurs Throughout Art and Nature," *Smithsonian* (dezembro de 1975): 110-120.

Hoggart, V. E., Jr. "Number Theory: The Fibonacci Sequence," in *Yearbook of Science and the Future.* Chicago: *Encyclopaedia Britannica,* 1977, 178-191.

Huntley, H. E. *The Divine Proportion.* Nova York: Dover Publications, 1970.

Knott, R. www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html.

Knott, T. www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnet2.html.

Markowski, G. "Misconceptions about the Golden Ratio," *College Mathematics Journal,* 23 (1992): 2-19.

Ohm, M. *Die reine Elementar-Mathematik.* Berlim: Jonas Veilags-Buchhandlung, 1835.

Runion, G.E. *The Golden Section.* Palo Alto: Dale Seymour Publications, 1990.

2: O TOM E O PENTAGRAMA

library.thinkquest.org/27890/mainIndex.html.

search.britannica.com/search?query=fibonacci.

Barrow, J. D. *Pi in the Sky.* Boston: Little, Brown and Company, 1992.

Beckmann, P. *A History of π.* Boulder, CO: Golem Press, 1977.

Boulger, W. "Pythagoras Meets Fibonacci, *Mathematics Teacher,* 82 (1989): 277-282.

Boyer, C. B. *A History of Mathematics.* Nova York: John Wiley & Sons, 1991.

Burkert, W. *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism.* Cambridge, MA: Harvard University Press, 1972.

Conway, J. H., e Guy, R. K. *The Book of Numbers.* Nova York: Copernicus, 1996.

Dantzig, T. *Number: The Language of Science.* Nova York: The Free Press, 1954.

de la Füye, A. *Le Pentagramme Pythagoricien, Sa Diffusion, Son Emploi dans le Syllaboire Cuneiform.* Paris: Geuthner, 1934.

Guthrie, K. S. *The Pythagorean Sourcebook and Library.* Grand Rapids, MI: Phanes Press, 1988.

Ifrah, G. *The Universal History of Numbers*. Nova York: John Wiley & Sons, 2000.
Maor, E. *e: The Story of a Number*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1994.
Paulos, J. A. *Innumeracy*. Nova York: Vintage Books, 1988.
Pickover, C. A. *Wonders of Numbers*. Oxford: Oxford University Press, 2001.
Schimmel, A. *The Mystery of Numbers*. Oxford: Oxford University Press, 1994.
Schmandt-Besserat, D. "The Earliest Precursor of Writing", *Scientific American* (junho de 1978): 38-47.
Schmandt-Besserat, D. "Reckoning Before Writing," *Archaeology*, 32-33 (1979): 22-31.
Singh, S. *Fermat's Enigma*. Nova York: Anchor Books, 1997.
Stanley, T. *Pythagoras*. Los Angeles: The Philosophical Research Society, 1970.
Strohmeier, J., e Westbrook, P. *Divine Harmony*. Berkeley, CA: Berkeley Hills Books, 1999.
Turnbull, H. W. *The Great Mathematicians*. Nova York: Barnes & Noble, 1993.
von Fritz, K. "The Discovery of Incommensurability of Hipposus of Metapontum," *Annals of Mathematics*, 46 (1945): 242-264.
Wells, D. *Curious and Interesting Numbers*. Londres: Penguin Books, 1986.
Wells, D. *Curious and Interesting Mathematics*. Londres: Penguin Books, 1997.

3: SOB UMA PIRÂMIDE QUE APONTA PARA A ESTRELA Y?

Beard, R. S. "The Fibonacci Drawing Board Design of the great Pyramid of Gizeh," *The Fibonacci Quarterly*, 6 (1968): 85-87.
Burton, D. M. *The History of Mathematics: An Introduction*. Boston: Allyn and Bacon, 1985.
Doczi, O. *The Power of Limits*. Boston: Shambhala, 1981.
Fischler, R. "Théories Mathématiques de la Grande Pyramide," *Crux Mathematicorum*, 4 (1978): 122-129.
Fischler, R. "What Did Herodotus Really Say? Or How to Build (a Theory of) the Great Pyramid", *Environment and Planning* B, 6 (1979): 89-93.
Gardner, M. *Fads and Fallacies in the Name of Science*. Nova York: Dover Publications, 1957.
Gazalé, M. J. *Gnomon*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1999.

"The Fibonacci Numbers", *Time*, 4 de abril de 1969, 49-50.

Gardner, M. *Mathematical Circus*. Nova York: Alfred A. Knopf, 1979.

Gardner, M. "The Multiple Fascination of the Fibonacci Sequence", *Scientific American* (março de 1969): 116-120.

Garland, T. H. *Fascinating Fibonaccis*. White Plains, NY: Dale Seymour Publications, 1987.

Gies, J., and Gies, F. *Leonard of Pisa and the New Mathematics of the Middle Ages*. Nova York: Thomas Y. Crowell Company, 1969.

Hoggartt, V. E. Jr. "Number Theory: The Fibonacci Sequence", Chicago: *Encyclopaedia Britannica*, Yearbook of Science and the Future, 1977, 178-191.

Hoggartt, V. E. Jr., e Bicknell-Johnson, M. "Reflections Across Two and Three Glass Plates", *The Fibonacci Quarterly*, 17 (1979): 118-142.

Horadam, A. F. "*Eight Hundred Years Young*", *The Australian Mathematics Teacher*, 31 (1975): 123-134.

Jean, R. V. *Mathematical Approach to Pattern and Form in Plant Growth*. Nova York: John Wiley & Sons, 1984.

O'Connor, J. J. e Robertson, E.F. www-history.mcs.st andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Fibonacci.html.

Pickover, C. A. *Keys to Infinity*. Nova York: John Wiley & Sons, 1995.

Rivier, N., Occelli, R., Pantaloni, J., e Lissowdki, A. "Structure of Binard Convection Cells, Phyllotaxis and Crystallopraphy in Cylindrical Symmetry", *Journal Physique*, 45 (1984): 49-63.

Singh, P. "The So-Called Fibonacci Numbers in Ancient and Medieval India", *Historia Mathematica*, 12 (1985): 229-244.

Smith, D. E. *History of Mathematics*. Nova York: Dover Publications, 1958.

Stewart, I. "Fibonacci Forgeries", *Scientific American* (maio de 1995): 102-105.

Stewart, I. *Life's Other Secret*. Nova York: John Wiley & Sons, 1998.

Thompson, D. W. *On Growth and Form*, Nova York: Dover Publications, 1992.

Vajda, S. *Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section*. Chichester: Ellis Horwood Limited, 1989.

Vorob'ev, N. N. *Fibonacci Numbers*, Nova York: Blaisdell. 1961.

6: A PROPORÇÃO DIVINA

Arasse, D. *Leonardo Da Vinci*. Nova York: Konecky & Konechy, 1998.

Beer, A. e Beer, P., eds., *Kepler: Four Hundred Years*. Vistas in Astronomy, vol. 18, Nova York: Pergamon Press, 1975.

Calvesi, M. *Piero Della Francesca*. Nova York: Rizzoli, 1998.

Caspar, M. *Kepler*. Nova York: Dover Publications, 1993.

Cromwell, P. R. *Polyhedra*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

Gingerich, O. "Kepler, Galilei, and the Harmony of the World" in *Music and Science in the Age of Galileo*, ed. V. Coeltho, 45-63. Dordrecht: Kluwer, 1992.

Gingerich, O. "Kepler, Johannes", in *Dictionary of Scientific Biography*, ed. Charles Coulston Gillespie, vol. 7, 289-312. Nova York: Scribners, 1973.

Ginzburg, C. *The Enigma of Piero*. Londres: Verso, 2000.

James, J. *The Music of the Spheres*. Nova York: Copernicus, 1993.

Jardine, N. *The Birth of History and Philosophy of Science: Kepler's "A Defense of Tycho against Ursus" with Essays on Its Provenance and Significance*. Cambridge: Cambridge University Press, 1984.

Kepler, J. *The Harmony of the World*. Filadélfia: American Philosophical Society, 1997.

Kepler, J. *Mysterium Cosmographicum*. Nova Yord: Abaris Books, 1981.

Leonardo Da Vinci. NY: Artabras/Reynal and Company, 1938.

MacKinnon, N. "The Portrait of Fra Luca Pacioli", Mathematical Gazette, 77 (1993): 130-219.

Martens, R. *Kepler's Philosophy and the New Astronomy*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2000.

O'Connor, J. J., e Robertson, E. F. www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Pacioli.html/Durer.html.

Pacioli, L. Divine Proportion. Paris: Librairie du Compagnonnage, 1988.

Pauli, W. "The Influence of Archetypal Ideas on the Scientific Theories of Kepler", in *The Interpretation of Nature and the Psyche*, 147-240. Nova York: Parthenon, 1955.

Stephenson, B. *The Music of the Spheres: Kepler's Harmonic Astronomy*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1994.

Strieder, P. Albrecht Dürer. Nova York: Abaris Books, 1982.

Taylor, R. E. *No Royal Road.* Chapel Hill: University of North Carolina Press, 1942.

Voelkel, J. R. *Johannes Kepler.* Oxford: Oxford University Press, 1999.

Westman, R. A. "The Astronomer's Role in Sixteenth Century: A Preliminary Survey", *History of Science,* 18 (1980): 105-147.

7: PINTORES E POETAS TÊM A MESMA LICENÇA

Altschuler, E. L. *Bachanalia.* Boston: Little, Brown and Company, 1994.

Bellosi, L. *Cimabue.* Nova York: Abbeville Press Publishers, 1998.

Bergamini, *D. Mathematics.* Nova York: Time Incorporated, 1963.

Bois, Y.-A., Joosten, J., Rudenstine, A. Z., e Janssen, H. *Piet Mondrian. Boston*: Little, Brown and Company, 1995.

Boring, E. G. *A History of Experimental Psychology.* Nova York: Appleton-Century-Crofts, 1957.

Bouleau, C. *The Painter's Secret Geometry.* Nova York: Harcourt, Brace & World, 1963.

Curchin, L., and Fischler, R. "Hero of Alexandria's Numerical Treatment of Division in Extreme and Mean Ratio and Its Implications", *Phoenix,* 35 (1981): 129-133.

Curtis, W. J. R. *Le Corbusier: Ideas and Forms.* Oxford: Phaidon, 1986.

d'Arcais, F. F. *Giotto.* Nova York: Abbeville Press Publishers, 1995.

Duckworth, G. E. *Structural Patterns and Proportions in Vergil's Aeneid.* Ann Arbor: University of Michigan Press, 1962.

Emmer, M. *The Visual Mind.* Cambridge, MA: MIT Press, 1993.

Fancher, R. E. *Pioneers of Psychology.* Nova York: W. W. Norton & Company, 1990.

Fechner, G. T. *Vorschule der Aesthetik.* Leipzig: Breitkopf & Härtel, 1876.

Fischler, R. "How to Find the 'Golden Number' Without Really Trying", *The Fibonacci Quarterly,* 19 (1981): 406-410.

Fischler, R. "On the Application of the Golden Ratio in Visual Arts", *Leonardo,* 14 (1981): 31-32.

Fischler, R. "The Early Relationship of Le Corbusier to the Golden Number", *Environment and Planning B,* 6 (1979): 95-103.

Godkewitsch, M. "The Golden Section: An Artifact of Stimulus Range and Measure of Preference", *American Journal of Psychology*, 87 (1974): 269-277.

Hambidge, J. *The Elements of Dynamic Symmetry*. Nova York: Dover Publications, 1967.

Herz-Fischler, R. "An Examination of Claims Concerning Seurat and the Golden Number", *Gazette des Beaux-Arts*, 125 (1983): 109-112.

Herz-Fischler, R. "Le Corbusier's 'regulating lines' for the villa at Garches (1927) and other early works", *Journal of the Society of Architectural Historians*, 43 (1984): 53–59.

Herz-Fischler, R. "Le Nombre d'or en France de 1896 à 1927", *Revue de l'Art*, 118 (1997): 9-16.

Hockney, D. *Secret Knowledge*. Nova York: Viking Studio, 2001.

Howat, R. *Debussy in Proportion*. Cambridge: Cambridge University Press, 1983.

Kepes, G. *Module, Proportion, Symmetry, Rhythm*. Nova York: George Braziller, 1966.

Larson, P. "The Golden Section in the Earliest Notated Western Music", *The Fibonacci Quarterly*, 16 (1978): 513–515.

Le Courbusier. *Modulor I and II*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1980.

Lendvai, E . *Béla Bartók: An Analysis of His Music*. Londres: Kahn & Averill, 1971.

Lowman, E. A. "Some Striking Proportions in the Music of Béla Bartók", *The Fibonacci Quarterly*, 9 (1971): 527-537.

Marevna. *Life with the Painters of La Ruche*. Nova York: Macmillan Publishing Co., 1974.

McManus, I. C. "The Aesthetics of Simple Figures", *British Journal of Psychology*, 71 (1980): 505-524.

Nims, J. F. Western Wind. Nova York: McGraw-Hill. 1992.

Nuland, S. B. *Leonardo da Vinci*. Nova York: Viking, 2000.

Osborne, H. ed. *The Oxford Companion to Art*. Oxford: Oxford University Press, 1970.

Putz, J. F. "The Golden Section and the Piano Sonatas of Mozart", *Mathematics Magazine*, 68 (1995): 275-282.

Sadie, S. *The New Grove Dictionary of Music and Musicians*. Nova York: Grove, 2001.

Schiffman, H. R., e Bobka, D. J. "Preference in Linear Partitioning: The Golden Section Reexamined", *Perception & Psychophysics*, 24 (1978): 102-103.

Schillinger, F. *Joseph Schillinger*. Nova York: Da Capo Press, 1976.
Schillinger, J. *The Mathematical Basis of the Arts*. Nova York: Philosophical Library, 1948.
Schwarz, L. "The Art Historian's Computer", *Scientific American* (abril de 1995): 106-111.
Somfai, L. *Béla Bártok: Compositions, Concepts, and Autograph Sources*. Berkeley: University of California Press, 1996.
Svensson, L. T. "Note on the Golden Section", *Scandinavian Journal of Psychology*, 18 (1977): 79-80.
Tatlow, R. e Griffiths, P. "Numbers and Music", in *The New Grove Dictionary of Music and Musicians*, 18 (2001): 231-236.
Watson, R. I. *The Great Psychologists*. Filadélfia: J. B. Lippincott Company, 1978.
White, M. *Leonardo the First Scientist*. Londres: Little, Brown and Company, 2000.
Woodworth, R. S., e Schlosberg, H. *Experimental Psychology*. Nova York: Holt, Rinehart and Winston, 1965.
Zusne, L. *Visual Perception of Form*. Nova York: Academic Press, 1970.

8: DOS LADRILHOS AOS CÉUS

Cohen, J., e Stewart, I. *The Collapse of Chaos. Discovering Simplicity in a Complex World*. Nova York: Penguin Books, 1995.
Fischer, R. *Financial Applications and Strategies for Traders*. Nova York: John Wiley & Sons, 1993.
Gardner, M. *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers*. Nova York: W. H. Freeman and Company, 1989.
Gleick, J. *Chaos*. Nova York: Penguin Books, 1987.
Lesmoir-Gordon, N., Rood, W., e Edney, R. *Introducing Fractal Geometry*. Cambridge: Icon Books, 2000.
Mandelbrot, B. B. *Fractal Geometry of Nature*. Nova York: W. H. Freeman and Company, 1988.
Mandelbrot, B. B. "A Multifractal Walk Down Wall Street", *Scientific American* (fevereiro de 1999): 70-73.
Matthews, R. "The Power of One", *New Scientist*, 10 de julho de 1999, 27-30.

Peitgen, H.-O., Jürgens, H., e Saupe, D. *Chaos and Fractals*. Nova York: Springer-Verlag, 1992.

Peterson, I. "Fibonacci at Random", *Science News*, 155 (1999): 376-377.

Peterson, I. *The Mathematical Tourist*. Nova York: W. H. Freeman and Company, 1988.

Peterson, I. "A Quasicrystal Construction Kit", *Science News*, 155 (1999): 60-61.

Prechter, R. R. Jr., e Frost, A. J. *Elliot Wave Principle*. Gainesville, GA: New Classics Library, 1978.

Schroeder, M. Fractals, *Chaos, Power Laws*. Nova York: W. H. Freeman and Company, 1991.

Steinhardt, P. J., Jeong, H.-C., Saitoh, K., Tanaka, M., Abe, E., e Tsai, A. P. "Experimental Verification of the Quasi-Unit-Cell Model of Quasicrystal Structure", *Nature*, 396 (1988): 55-57.

Stewart, I. *Does God Play Dice?* Londres: Penguin Books, 1997.

Walser, H. *The Golden Section*. Washington, DC: The Mathematical Association of America, 2001.

9: SERÁ QUE DEUS É UM MATEMÁTICO

Baierlein, R. *Newton to Einstein: The Trail of Light*. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

Barrow, J. D. *Impossibility*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

Chandrasekhar, S. *Truth and Beauty*. Chicago: University of Chicago Press, 1987.

Chown, M. "Principia Mathematica III", *New Scientist*, 25 de agosto de 2001, 44-47.

Davis, P. J., e Hersh, R. *The Mathematical Experience*. Boston: Houghton Mifflin Company, 1998.

Dehaene, S. *The Number Sense*. Oxford: Oxford University Press, 1997.

Deutsch, D. *The Fabric of Reality*, Nova York: Penguin Books, 1997.

Hersh, R. What Is Mathematics, Really? New York: Oxford University Press, 1997.

Hill, T. P. "The First Digit Phenomenon", *American Scientist*, 86 (1998): 358-363.

Kleene, S. C. "Foundations of Mathematics", Chicago: *Encyclopaedia Britannica* (1971), 1097-1103.

Lakatos, I. *Mathematics, Science and Epistemology*. Cambridge: Cambridge University Press, 1978.

Lakoff, G., e Núñez, R. *Where Mathematics Comes From*. Nova York: Basic Books, 2000.

Livio, M. *The Accelerating Universe*. Nova York: John Wiley & Sons, 2000.

Maor, E. *To Infinity and Beyond: A Cultural History of the Infinite*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1987.

Mattehws, R. "The Power of One", *New Scientist*, 10 de julho de 1999, 26-30.

Penrose, R. *The Emperor's New Mind*. Oxford: Oxford University Press, 1989.

Penrose, R. *Shadows of the Mind*. Oxford: Oxford University Press, 1994

Pickover, C. A. *The Loom of God*. Cambridge, MA: Perseus Books, 1997.

Popper, K. R., e Eccles, J. C. *The Self and Its Brain*. Nova York: Springer International, 1977.

Raimi, R. "The Peculiar Distribution of the First Digit", *Scientific American* (dezembro 1969): 109-119.

Raskin, J. www.jefraskin.com/forjef 2/jefweb-compiled/unpublished/effectiveness_mathematics/

Robinson, A. "From a Formalist's Point of View", *Dialectica*, 23 (1969): 45-49.

Russell, B. *A History of Western Philosophy*. Nova York: Simon and Schuster, 1945.

Russell, B. *Human Knowledge, Its Scope and Its Limits*. Nova York: Simon and Schuster, 1948.

Weisstein, E. matworld.wolfram.com/BenfordsLaw.html.

Wolfram, S. *A New Kind of Science. Champaign*, IL: Wolfram Media, 2002.

ÍNDICE

CRÉDITOS

O autor e o editor agradecem a permissão para reproduzir o seguinte material protegido por direitos autorais:

OBRAS DE ARTE

Figs. 1, 2, 3, 7, 9, 10, 11, 12, 14a, 14b, 18, 20a, 20c, 20d, 20e, 21, 24, 25a, 25b, 26, 27, 29, 30, 33a, 33b, 35, 37, 40, 41, 42, 44a, 44b, 49, 57a, 57b, 58, 61, 62, 63, 64, 86, 89, 91, 97a, 97b, 97c, 101a, 101b, 102a, 102b, 103a, 103b, 105, 106a, 106b, 107, 112, 114, 123, 124 e os diagramas do Apêndice 2, do Apêndice 3 e do Apêndice 4 de Jeffrey L. Ward

Fig. 4: The Bailey-Matthews Shell Museum

Fig. 5: Chester Dale Collection, Photograph © 2002 Board of Trustees, National Gallery of Art, Washington, D.C. © 2002 Salvador Dalí, Gala-Salvador Dalí Foundations/Artists Rights Society (ARS), Nova York

Fig. 6: Reimpresso com a permissão de John D. Barrow, *Pi In the Sky* (Oxford: Oxford Univesity Press, 1992).

Fig.13: © Copyright The British Museum, Londres.

Fig. 17: Hirmer Fotoarchiv

Fig. 19: Reimpresso com a permissão de Robert Dixon, Mathographics (Mineola: Dover Publications, 1987)

Figs. 22 e 23, parte inferior: reproduzido com a permissão de H. E. Huntley, *The Divine Proportion* (Mineola: Dover Publications, 1970)

Fig. 23, parte superior: Alison Frantz Photographic Collection, American School of Classical Studies at Athens.

Fig. 28: Reimpresso com a permissão de Trudi Hammel Garland, *Fascinating Fibonaccis Mystery and Magic in Numbers* © 1987 by Dale Seymour Publications, uma impressão de Pearson Learning, uma divisão da Pearson Education, Inc.

Figs. 31-32: Reimpresso com a permissão de Trudi Hammel Garland, *Fascinating Fibonaccis Mystery and Magic in Numbers* © 1987 by Dale Seymour Publications, uma impressão de Pearson Learning, uma divisão da Pearson Education, Inc.

Fig. 34: Reimpresso com a permissão de J. Brandmüller, "Five fold symmetry in mathematics, physics, chemistry, biology and beyond", em I. Hargitta, ed. *Five Fold Symmetry* (Cingapura: World Scientific, 1992).

Fig. 36: Reimpresso com a permissão de N. Rivier *et al.*, *J. Physique*, 45, 49 (1984).

Fig. 38: The Royal Collection © 2002, Her Majesty Queen Elizabeth II

Fig. 39: Reimpresso com a permissão de Edward B. Edwards, *Pattern and Design with Dynamic Symmetry* (Mineola: Dover Publications, 1967).

Fig. 43: Crédito NASA e o Hubble Heritage Team.

Figs. 46, 45, 47, 50: Alinari/Art Resource, NY

Fig. 47: Linhas de perspectiva, reimpresso com a permissão de Laura Geatti, Michelle Emmer Editora, *The Visual Mind: Art and Mathematics* (Cambridge: the MIT Press, 1993).

Fig. 52: Propriedade da Ambrosian Library. Todos os direitos reservados. Reprodução proibida.

Fig. 53: Scala/Art Resource, NY]

Figs. 55, 56: The Metropolitan Museum of Art, Dick Fund, 1943

Fig. 57: Reimpresso com a permissão de David Wells, *The Penguin Book of Curious and Interesting Mathematics* (Londres: The Penguin Group, 1997), copyright © David Wells, 1997.

Figs. 68-69: Gentilmente cedido pelo Institute for Astronomy, Universidade de Viena.

Figs. 70, 71, 72: Alinari/Art Resource, NY

Fig. 72: National Gallery, Londres

Fig. 73: Alinari/Art Resource, NY

Fig. 75: Scala/Art Resource, NY

Fig. 76: The Metropolitan Museum of Art, legado de Stephen C. Clark, 1960. (61.101.17)

Fig. 77: Philadelphia Museum of Art: The A. E. Gallatin Collection, 1952. © 2002 Artists Rights Society (ARS), Nova York/ADAGP, Paris

Fig. 78: Coleção particular, Roma. © 2002 Artists Rights Society (ARS), Nova York/ADAGP, Paris

Fig. 79: © 2002 Artists Rights Society (ARS), Nova York/ADAGP, Paris/FLC

Figs. 80, 81: © 2002 Artists Rights Society (ARS), Nova York/ADAGP, Paris/ FLC

Fig. 82: Coleção particular. De "Module Proportion, Symmetry Rhythm" de Gyorgy Kepes, George Braziller. © 2002 Artists Rights Society (ARS), Nova York/DACS, Londres

Fig. 83: The Museum of Modern Art/Licensed by Scala/Art Resource, NY. © 2002 Mondrian/Holtzman Trust, c/o Beeldrecht/Artists Rights Society (ARS), Nova York

Fig. 84: Reimpresso com a permissão de G. Markowsky, *The College Mathematics Journal*, 23, 2 (1992).

Fig. 85: Reimpresso com a permissão de Denis Arnold, ed., *The New Oxford Companion to Music*, Vol. 2 (Oxford: Oxford University Press, 1984).

Figs. 87, 88: Reimpresso com a permissão de Ernö Lendvai, *Béla Bartók, An Analysis of His Music* (Londres: Kahn & Averill, 1971).

Fig. 89: Reimpresso com a permissão de Roy Howat, *Debussy in Proportion* (Cambridge: Cambridge University Press, 1983).

Fig. 90: Reimpresso com a permissão de Joseph Schillinger, *The Schillinger System of Musical Composition* (Nova York: Carl Fischer, LLC, 1946)

Fig. 92: Rijksmuseum, Amsterdã

Fig. 93: Kunsthistorisches Museum, Viena

Fig. 94: Reimpresso com a permissão de Ivars Peterson, *The Mathematical Tourist* (Nova York: W. H. Freeman, 1988).

Fig. 95: Cortesia de Ricardo Villa-Real. De "The Alhambra and the Generalife", de Ricardo Villa-Real

Fig. 96: © 2002 Cordon Art-Baard, Holanda. Todos os direitos reservados.

Fig. 99: Reimpresso com a permissão de Richard A. Dunlap, *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers* (Cingapura: World Scientific, 1997).

Fig. 100: Reimpresso com a permissão de Richard A. Dunlap, *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers* (Cingapura: World Scientific, 1997).

Fig. 104: Reimpresso com a permissão de Martin Gardner, *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers* (Nova York: W. H. Freeman, 1988).
Figs. 108-109: Reimpresso com a permissão de Paul Steinhardt.
Fig. 110: Reimpresso com a permissão de Pat Thiel.
Fig. 111: Erich Lessing/Art Resource, NY
Figs. 115-122: Reimpresso com a permissão de Hans Walser, *The Golden Section* (Washington: The Mathematical Association of America, 2001).
Figs. 123-124: Reimpresso com a permissão de Alan H. Guth, *The Inflationary Universe* (Reading: Addison-Wesley, 1997).
Figs. 125-126: Reimpresso com a permissão de R. R. Prechter e A. J. Frost, *The Elliott Wave Principle* (Gainesville: New Classic Library, 1998).
Fig. 127: Reimpresso com a permissão de Robert Fischer, *Fibonacci Applications and Strategies for Traders* (Nova York: John Wiley & Sons, 1993).
Fig. 128: The Pierpont Morgan Library/Art Resource, NY

TEXTO

Página 39: Poema sobre Pitágoras: Reimpresso com a permissão de Steven Cushing.
Página 223: Poema sobre William Blake: Reimpresso com a permissão de Jasper Memory.
Página 81, Poema "Constantly Mean": Reimpresso com a permissão de *The Fibonacci Quarterly*, 15.3 (1977) p. 236.
Página 194: Primeira estrofe de "The Statues": Reimpresso com a permissão de Scribner, uma impressão de Simon & Schuster Adult Publishing Group, de *The Collected Works of W. B. Yeats: Volume I, The Poems, Revised*, editado por Richard J. Finneran. © 1940 por Georgie Yeats; direitos autorais renovados em 1968 por Bertha Georgie Yeats, Michael Butler Yeats, Anne Yeats.
Página 198: Poema com o número de batimentos indicados: Reimpresso com a permissão de Trudi Hammel Garland, *Fascinating Fibonaccis Mystery and Magic in Numbers* © 1987 por Dale Seymour Publications, uma impressão de Pearson Learning, uma divisão da Pearson Education, Inc.

CRÉDITOS ADICIONAIS:

Fig. 8: reproduzido de Robert Lawlor, *Sacred Geometry* (Londres: Thames and Hudson, 1982).

Figs. 15-16: reproduzido de Robert Lawlor, *Sacred Geometry* (Londres: Thames and Hudson, 1982).

Página 195: Poema de Katherine O'Brien: reproduzido de Robert L. Weber, *Science with a Smile* (Bristol: Institute of Physics Publishing, 1992). Todos os esforços foram feitos para descobrir o detentor da fonte.

Página 195: Poema de J. A. Lindon: reproduzido de Martin Gardner, *Mathematical Circus*, (Nova York: Alfred A. Knopf, 1979). Todos os esforços foram feitos para descobrir o detentor da fonte.

Este livro foi composto na tipologia Agaramond,
em corpo 12/16, e impresso em papel
off-white 80g/m², na Prol Editora Gráfica Ltda.